Real Analysis
Volume 2

2nd year degree honours course

Dr. Arnab Chakraborty

Associate Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

⋄

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

⋄

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

এসে গেল আমাদের real analysis বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডের দ্বিতীয় সংস্করণ। প্রথম সংস্করণের বিভিন্ন ছাপার ভুল ইত্যাদি ঠিক করা হয়েছে এই সংস্করণে। আর 2014 পর্যন্ত সব প্রশ্নের বিশদ আলোচনাও আছে।
আমাদের "বাংলায় বোঝানো ইংরাজি বই" সিরিজের অন্যান্য বইয়ের মতই এটাও লেখা হয়েছে সেই সব ছাত্রছাত্রীদের কথা মাথায় রেখে যারা ইংরাজী মাধ্যমে পড়ছ, কিন্তু ইংরাজীর চেয়ে যাদের বাংলা বুঝতে বেশী সুবিধা হয়। যাবতীয় technical term ইত্যাদি ইংরাজীতেই লেখা, উত্তরগুলোও তাই। শুধু বোঝানো অংশটুকু বাংলায়। কি করে একটা উত্তর ইংরাজীতে গুছিয়ে লিখতে হয় সেটা এই বইতে handwriting-এর মত লিখে দেখানো আছে।

বইটায় প্রচুর ছবি দেওয়া আছে। একটা অংকের উত্তর জানা থাকলে লিখে ফেলা কঠিন নয়। কঠিন হল উত্তরটা নিজে নিজে ভেবে বার করা। ছবিগুলো এই কাজে অপরিহার্য। এই বইয়ের অন্যতম উদ্দেশ্য হল তোমাকে ছবি এঁকে অংক করতে উৎসাহিত করা। অংক করার সময়ে যত পারবে ছবি আঁকবে, এমন কি পরীক্ষার খাতাতেও। ওতে সময় নষ্ট হয় না, বরং সময় বাঁচে।

কি করে পড়বে

সূচীপত্রের দিকে তাকালেই দেখবে পুরো বইটাকে day1, day2,... এইভাবে দিনে দিনে ভাগ করা আছে। এক দিনে ওর বেশী করার চেষ্টা কোরো না, মাথা ঝিম্‌ঝিম্‌ করবে। মোটামুটিভাবে এক দিনের কাজ বলে যতটা দিয়েছি, সেটা হল কোচিং ক্লাসের দুই ঘন্টার পড়া।

পড়ার সময়ে খাতা পেন নিয়ে বসবে, ঠিক যেন ক্লাস করছ। যেগুলো ইংরাজীতে লেখা সেগুলো যেন মাষ্টারমশাই বোর্ডে লেখাচ্ছেন, আর বাংলাগুলো মুখে বলছেন। তুমি ক্লাসে থাকলে যেভাবে নোট নিতে এই বইটা পড়ার সময়েও ঠিক সেভাবেই নেবে। পড়ার শেষে নিজের নোটটা ভালো করে পড়ে দেখবে সব বুঝেছ কি না, না বুঝলে বই থেকে দেখে নেবে, এবং কি বুঝলে সেটা নিজের নোটে লিখে নেবে।
প্রতিটি অধ্যায়ে সেই বিষয়ে 1999 থেকে 2014 পর্যন্ত যাবতীয় প্রশ্ন সহজ থেকে কঠিন এইভাবে সাজিয়ে আলোচিত হয়েছে। সুতরাং মূল পড়ার ফাঁকে ফাঁকেই সেগুলো শেখা হয়ে যাবে, আলাদা করে পরীক্ষার আগে 10 years' paper নিয়ে ধস্তাধস্তি করতে হবে না। পরীক্ষায় অনেক সময়ে প্রশ্ন ভুল ছাপা হয়। তা নিয়ে পরের বছরের ছাত্ররা ধন্দে পড়ে যায়। আমরা তাই ভুল প্রশ্নগুলোকেও বাদ দিইনি। ওগুলো কেন ভুল, সেটাও বোঝানো হয়েছে।

এই বইয়ের 10 years' question-গুলো নিয়েছি বাজারে প্রচলিত সংকলনগুলো থেকে। সুতরাং ভুল প্রশ্নগুলোর ভুলের দায় কতটা প্রশ্নকর্তার আর কতটা সংকলনকারীর সেটা জানি না। এই বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। সেই কাজে বিশেষ সহায়তা করেছেন IISER-এর অধ্যাপক ডঃ অশোক নন্দ। তাঁর কাছে আমার কৃতজ্ঞতার শেষ নেই। আর তোমরা উৎসাহী ছাত্রছাত্রীরা তো আছোই। শারণ্য, পিয়ালি, প্রজামিত্র, নাল্টু, রামিজ, সৈকত, প্রীতীশ, জীবিতেশ, পরিক্ষিত, মহামিত্র... যাদের নাম বাদ গেল, তারা যেন আমার উপর চটে যেও না!
সবার এত সহযোগিতা সত্ত্বেও কিছু ভুল থেকে যাওয়া অসম্ভব নয়। কোনো ভুলের সন্ধান পেলে, বা অন্য কারণে যোগাযোগ করতে চাইলে email (arnabc74@gmail.com) বা ফোন (9231542600) ব্যবহার করতে পারো। আর হ্যাঁ, এই বইয়ের জন্য একটা website বানিয়েছি--

http://cwave.eu5.org/real2

ভুল-ত্রুটি যা বেরোবে তার একটা তালিকা দিয়ে দেব ওখানে। তোমাদের প্রশ্ন থাকলে জিজ্ঞাসা করার একটা জায়গাও থাকবে ওখানে।

অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
Differentiation (part 1)

DAY 1
গোড়ার জিনিস

এই অধ্যায়ে আমরা differentiation শিখব। হায়ার সেকণ্ডারীতে পড়ার সময়ে আমরা কিছুটা differentiation শিখি। সেই কথাগুলো একটু মনে করে নিই।

1.1 পুরাণো সেই দিনের কথা

Differentiation কথাটা শুনলেই আমাদের মনে মোটামুটি তিনটে জিনিস ভেসে ওঠে--

1. কিছু পরিচিত function-এর derivative কি কি হয় তার একটা তালিকা, যেমন $\sin x$-কে differentiate করলে $\cos x$ হয়, $\cos x$-কে differentiate করলে $-\sin x$ হয়, ইত্যাদি।

2. $f(x)$ আর $g(x)$-এর derivative থেকে $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, আর $f(x)/g(x)$-এর derivative বার করার নিয়মাবলী--

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) &= f'(x) \pm g'(x), \\
\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

   শেষেরটার জন্য অবশ্যই $g(x) \neq 0$ দরকার।

3. Differentiation-এর সংজ্ঞা--

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

   কেউ কেউ আবার $x = a + h$, (মানে $h = x - a$) লেখে--

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Differentiation-এর সাথে tangent-এর (স্পর্শকের) একটা সম্পর্ক আছে। এই কথাটা হায়ার সেকণ্ডারীতে বলা হয়, কিন্তু সব ছাত্রের কাছে স্পষ্ট হয় না। তাই একটু আলোচনা করা যাক। আমরা জানি যে

$$y = mx + c$$

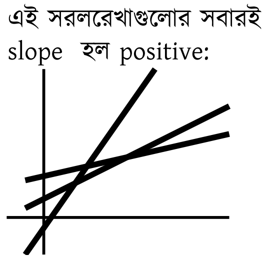


Fig 1

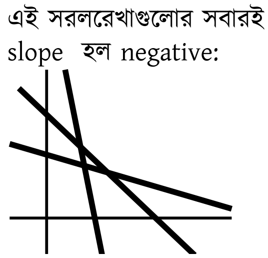


Fig 2

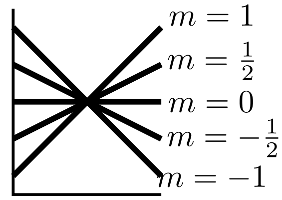


Fig 3

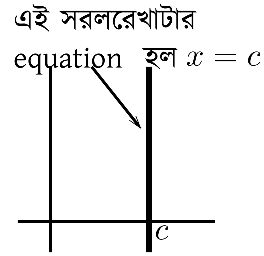


Fig 4

আকারের equation-এর গ্রাফ হয় একটা সরলরেখা। এখানে m-কে বলে সরলরেখাটার slope (বাংলায় বলে নতি), কারণ m থেকে জানা যায় যে সরলরেখাটা কতটা খাড়া আছে বা হেলে আছে। যদি সরলরেখাটা বাঁদিক থেকে ডানদিকে ওঠে তবে $m > 0$ হয়। Fig 1 দ্যাখো। আর যদি $m < 0$ হয় তবে সরলরেখাটা দেখায় Fig 2-এর মত। মনে রেখো $m = 0$ হলে সরলরেখাটা horizontal হয়। $m > 0$ যত বাড়ে ততই খাড়া হয়ে ওঠে, আবার $m < 0$ যত কমে ততই সরলরেখাটা খাড়া হয়ে ওঠে উল্টোদিকে (Fig 3)।

খালি এক ধরণের সরলরেখা আছে যাদের $y = mx + c$ আকারে লেখা যায় না, তারা হল vertical সরলরেখা। এদের equation হল $x = c$ আকারের (যেখানে c কোনো constant). Fig 4 দ্যাখো। যেহেতু $y = mx + c$ আকারে লেখা যায় না, তাই vertical সরলরেখাদের slope হল undefined. সাবধান, অনেকে ভুল করে মনে করে যে এদের slope হল ∞. যুক্তি দেখায় এইরকম--একটা positive slope-ওয়ালা লাইনের slope যদি ∞-র দিকে যায়, তবে লাইনটা ক্রমশঃ vertical হয়ে দাঁড়াবে। তাই vertical লাইনের slope নিশ্চয়ই ∞ হবে। এটা ভুল যুক্তি, কারণ একটা negative slope-ওয়ালা লাইনের slope যদি $-\infty$-র দিকে যায়, তবেও সেটা ক্রমশঃ খাড়া হয়ে দাঁড়াবে, সুতরাং আগের যুক্তি যদি সঠিক হত তবে একইরকম যুক্তিতে vertical লাইনের slope হওয়া উচিত ছিল $-\infty$! কিন্তু একই লাইনের slope একই সঙ্গে তো আর ∞ এবং $-\infty$ হতে পারে না! তাই মনে রেখো যে vertical লাইনের slope হল undefined.

Fig 5-এ একটা function $f(x)$-এর গ্রাফ রয়েছে। $x = a$-তে গ্রাফটার tangent (স্পর্শক) এঁকেছি। একটা গ্রাফের কোনো বিন্দুতে tangent হল এমন একটা সরল রেখা যেটা ওই বিন্দুতে গ্রাফটা আলতো করে ছুঁয়ে থাকে। তুমি যদি ওই বিন্দুর কাছাকাছি অংশটুকুকে খালি দ্যাখো তবে tangent আর গ্রাফটা একেবারে এক হয়ে আছে মনে হবে।

যদি tangent ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝতে অসুবিধা হয় তবে দুটো উপমা মাথায় রাখলে সুবিধা হবে--

- একটা ডিমকে যদি তুমি মেঝের উপরে রাখো, তবে সব সময়ে ডিমটা এমনভাবে থাকবে যাতে মেঝেটা ডিমের গায়ের সঙ্গে tangent হয় Fig 6. অন্য কোনোভাবে রাখা অসম্ভব! এই উপমা থেকে ভাবতে পারো যে একটা curve-এর কোনো বিন্দুতে tangent হল সেই সরলরেখা যেটা ওই বিন্দুতে curve-টার সঙ্গে সবচেয়ে স্বাভাবিকভাবে খাপ খায়।

- পৃথিবীটা গোল, কিন্তু সাদা চোখে কিন্তু মনে হয় যেন সমতল। Fig 7 দেখলে বুঝবে যে এই সমতলটা আসলে ভূপৃষ্ঠের সঙ্গে tangent. সাদা চোখে আমরা বেশী দূর অব্দি দেখতে পাই না, তাই ভূপৃষ্ঠ আর তার tangent-কে আলাদা করতে পারি না, মনে করি যেন আমরা tangent-টার উপরেই চলাফেরা করছি।

এতক্ষণ tangent ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝলাম। অংকের ভাষায় এর সংজ্ঞা লিখতে গেলে differentiation-এর শরণাপন্ন হতে হবে। ধরো $y = f(x)$-এর গ্রাফ আছে। $x = a$ বিন্দুতে এর tangent আঁকলাম। Tangent-টা হল একটা সরলরেখা। যদি

Fig 5

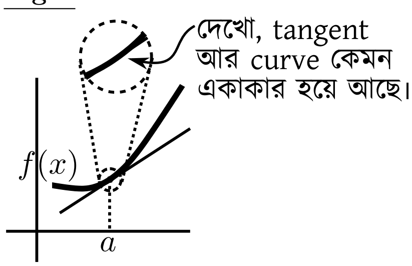


Fig 6

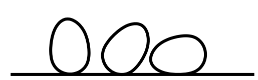
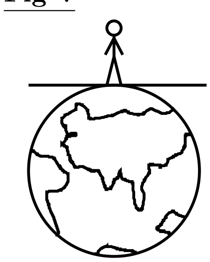


Fig 7



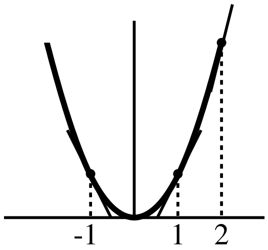


Fig 8

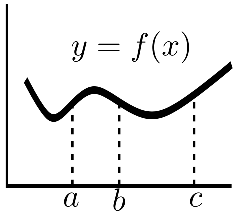


Fig 9

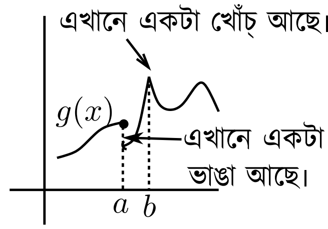


Fig 10

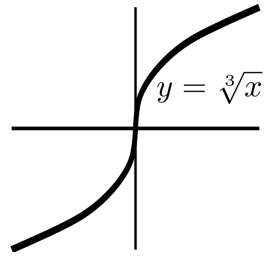


Fig 11

সেটা vertical না হয় তবে তার একটা slope আছে। এই slope-টাই হল $f'(a)$.

Example 1: Fig 8-এ $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ রয়েছে। কয়েকটা বিন্দুতে আমরা tangent এঁকেছি। ছবি দেখে বোঝা যাচ্ছে যে $x = -1$-এ tangent-এর slope হল negative. আবার $x = 1$-এ slope হল positive. আবার $x = 2$-তেও slope-টা positive এবং আরও বড় (কারণ tangent-টা আরও বেশী খাড়া)। Differentiate করে দ্যাখো যে $f'(-1), f'(1)$ আর $f'(2)$ একই কথা বলে কি না।
SOLUTION: এখানে $f'(x) = 2x$. তাই $f'(-1) = -2$, যেটা সত্যিই negative, ঠিক যেমনটা ছবি দেখে বুঝেছিলাম। আবার $f'(1) = 2$ আর $f'(2) = 4$ দুজনেই positive, এবং $f'(2) > f'(1)$. এটাও আমরা ছবি দেখেই বুঝেছিলাম। ■

Exercise 1: Fig 9 দেখে চোখের আন্দাজে বল $f'(a), f'(b), f'(c)$-এর মধ্যে কারা positive, কারা negative. ■

1.1.1 নতুন কি শিখব?

এবার বলি আমরা নতুন কি শিখতে চলেছি। প্রথম জিনিস হল ছবি দিয়ে derivative ব্যাপারটাকে আরেকটু গভীরভাবে তলিয়ে দেখব। দ্বিতীয়তঃ, এক্ষুণি যে limit-টা লিখলাম, সেটা কখন exist করে, কখন করে না, ইত্যাদি বিষয় নিয়ে মাথা ঘামাব। তৃতীয়তঃ $f(x)$-এর সাথে $f'(x)$-এর কিছু গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক শিখব। আর চতুর্থ জিনিস যেটা শিখব সেটা হল differentiation-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ।

1.2 গ্রাফ দিয়ে বোঝা

অংক শেখার সময়ে সব কিছু ছবি দিয়ে বুঝতে চেষ্টা করা ভালো। আমরা এবার ছবি এঁকে differentiation-এর মূল ধারণাটা শিখব। এই ধারণাটা একবার মনে গেঁথে গেলে বহু ক্ষেত্রে কাজে লাগবে।

1.2.1 Smoothness (মসৃণতা)

Fig 9 আর Fig 10 দ্যাখো। মনে কর গ্রাফ দুটো লোহার সরু তার দিয়ে তৈরী। এবার তুমি সেই তার বরাবর আঙুল বোলাচ্ছো। তাহলে Fig 9-এর ক্ষেত্রে পুরো তারটাই তোমার আঙুলে মসৃণ ঠেকবে। কিন্তু Fig 10-এ একজায়গায় একটা ভাঙা আছে আর আরেকজায়গায় একটা খোঁচ অনুভব করবে। আমরা বলব যে $g(x)$ function-টা $x = a$ এবং $x = b$-তে differentiable নয়। কিন্তু x-এর বাকী সব value-তে $g(x)$ দিব্যি differentiable, কারণ কোনো খোঁচ বা ভাঙা নেই নেই। একই যুক্তিতে $f(x)$ function-টা সর্বত্র differentiable.
একটা গ্রাফ যদি কোনো বিন্দুতে মসৃণ হয় একমাত্র তবেই সেই বিন্দুতে তার tangent আঁকা যায়। এই tangent-এর slope (এর আরেক ইংরাজী প্রতিশব্দ হল gradient)-কেই বলি $f'(a)$. যদি সেই বিন্দুতে গ্রাফটা মসৃণ না হয় (যেমন খোঁচ বা ভাঙা থাকলে) তবে কোনো tangent আঁকা যাবে না, এবং তাই তার slope-এরও কোনো প্রশ্ন নেই। সেইসব বিন্দুতে $f(x)$ differentiable হবে না।
এইখানে একটা ছোট্টো প্যাঁচ আছে। একটা ঘটনা সম্ভব যেখানে গ্রাফটা মসৃণ হলেও function-টা differentiable নয়। এরকম একটা function হল $f(x) = \sqrt[3]{x}$, যার গ্রাফটা আছে Fig 11-এ। মনে মনে চট্ করে গ্রাফের গায় আঙুল বুলিয়ে দ্যাখো, আশা করি এর মসৃণতা বিষয়ে কোনো সন্দেহ নেই। এবার তুমি $x = 0$-তে tangent-টা আঁকলে পাবে y-axis-টা। এটা

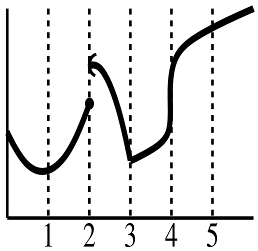


Fig 12

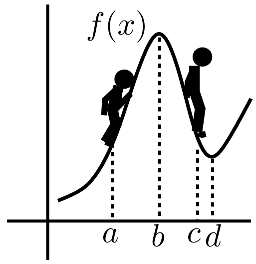


Fig 13

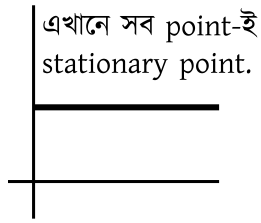


Fig 14

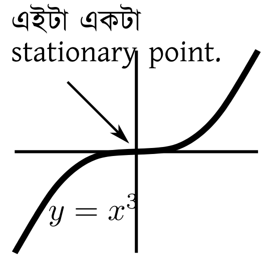


Fig 15

একটা vertical লাইন, তাই কোনো slope হয় না। তাই আমরা বলব যে, $f(x)$ function-টা $x = 0$-তে differentiable নয়।
এই একধরণের ব্যতিক্রম বাদ দিলে বাকী সব ক্ষেত্রেই মসৃণতা আর differentiability সমার্থক।
তার মানে একটা function তিন রকম কারণে differentiable না হতে পারে--ভাঙা থাকলে (অর্থাৎ discontinuous হলে), খোঁচ থাকলে, আর যদি tangent-টা vertical হয়ে যায়। এবার নীচের অংকটা করতে কষ্ট হবার কথা নয়।

Exercise 2: Fig 12-এ একটা function $f : (0, 6) \to \mathbb{R}$ দেখানো হয়েছে। এটা কোথায় কোথায় differentiable নয়? ■

1.2.2 Increasing/decreasing

মনে কর Fig 13-এর গ্রাফটা হল একটা পার্বত্য অঞ্চল। এর উপর দিয়ে একটা লোক বাঁদিক থেকে ডানদিকে হেঁটে চলেছে। তাহলে এই মুহূর্তে লোকটা উঠছে, না নামছে? দেখাই যাচ্ছে যে, উঠছে। আমরা বলব যে, $x = a$-তে $f(x)$ হল increasing (মানে x বাড়লে $f(x)$-ও বাড়ে)। যখন লোকটা $x = b$-এর জায়গায় পৌঁছবে তখন নীচের দিকে নামছে। তাই $x = b$-তে $f(x)$-কে বলব decreasing. এই দুই অবস্থার মাঝখানে লোকটা কোনো একসময়ে $x = c$-তে ছিল। ঠিক সেই মুহূর্তে লোকটা উঠছিলও না নামছিলও না, (সবে ওঠা শেষ করেছে, নামা এখনও শুরু হয় নি)। আমরা বলব $f(x)$ হল $x = c$-তে stationary. অনেক সময়ে আমরা বলব যে $x = c$ হল $f(x)$-এর একটা stationary point. একই যুক্তিতে $x = d$-ও $f(x)$-এর আরেকটা stationary point, (এখানে সবে নামা শেষ হয়েছে, এবং ওঠা এখনো শুরু হয় নি)। এখানে stationary শব্দটা দেখে মনে কোরো না যেন এর সঙ্গে পাড়ার স্টেশনারী দোকানগুলোর কোনো সম্পর্ক আছে। সেই স্টেশনারীর বানান অন্য-- "stationEry" আর অংকের স্টেশনারীর বানান হল "stationAry." ওদের উচ্চারণ এক, কিন্তু মানে আলাদা। আমরা stationary point-এর দুটো উদাহরণ দেখেছি। এক ক্ষেত্রে সবে ওঠা শেষ হয়েছে, নামা শুরু হয় নি, অন্য ক্ষেত্রে নামা শেষ হয়েছে, ওঠা শুরু হয় নি। এছাড়াও অন্যরকমের stationary point সম্ভব। যেমন Fig 14। এখানে ওঠানামার কোনো গল্পই নেই, তাই সব point-ই হল stationary point, কারণ function-টা আসলে constant. আরেকভাবেও stationary point আসতে পারে, যেমন ধরো $f(x) = x^3$-এর বেলায় (Fig 15)। এখানে $x = 0$-তে একটা stationary point আছে, কিন্তু এর বাঁদিকেও গ্রাফটা increasing, ডানদিকেও তাই, মাঝখানে ওই একটা $x = 0$ বিন্দুতে খালি মুহূর্তের বিরতি।
যদি $f(x)$ কোনো $x = c$-তে differentiable হয় তবে

- increasing হওয়া মানে $f'(c) > 0$,
- decreasing হওয়া মানে $f'(c) < 0$,
- stationary হওয়া মানে $f'(c) = 0$,

1.2.3 Maximum/minimum

এবার Fig 16 দ্যাখো। লক্ষ কর $x = a$ আর $x = b$-তে একটা করে ঢিপি আছে। আমরা বলব $x = a$ হল $f(x)$-এর একটা **local maximum.** একইভাবে $x = b$ হল আরেকটা local maximum. যদি ঢিপির বদলে গর্ত থাকত তবে বলতাম

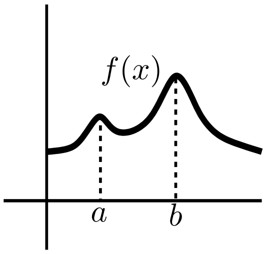


Fig 16

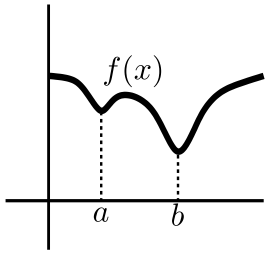


Fig 17

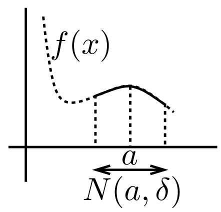


Fig 18

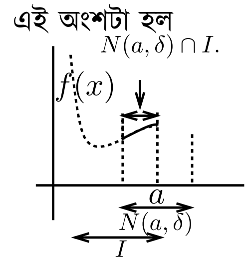


Fig 19

local minimum, যেমন Fig 17-তে। অংকের ভাষায়--ধরো $f : I \to \mathbb{R}$ হল একটা function, যেখানে $I \subseteq \mathbb{R}$ একটা interval. তবে কোনো $a \in I$-কে আমরা একটা local maximum বলব যদি

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap I \quad f(x) \leq f(a)$$

হয়। বোঝার জন্য Fig 18 দ্যাখো। এখানে $x = a$ হল একটা local maximum, মানে a-কে ঘিরে এমন একটা neighbourhood $N(a, \delta)$ আছে যাতে ওর মধ্যে গ্রাফটা $f(a)$-এর চেয়ে উপরে না ওঠে। লক্ষ কর যে আমরা local maximum-এর সংজ্ঞায় $N(a, \delta) \cap I$ লিখেছি। মানে যদি $N(a, \delta)$-র খানিকটা I-এর বাইরে চলে যায়, তবে বাইরের অংশটুকুকে হিসেবে ধরছি না। এমন একটা উদাহরণ রয়েছে Fig 19-এ। এখানে $x = a$-তে একটা local maximum আছে, কিন্তু $N(a, \delta)$-র অর্ধেকটাই I-এর বাইরে। একইভাবে local minimum-এর সংজ্ঞা লিখতে পারি-- $b \in I$-কে বলব local minimum যদি

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap I \quad f(x) \geq f(a)$$

হয়।
Local maximum আর local minimum-দের একত্রে বলে **local extremum.**

Exercise 3: Fig 20-এ কোথায় কোথায় local maximum আর কোথায় কোথায় local minimum আছে? এদের মধ্যে কোথায় কোথায় function-টা differentiable নয়? ■

যদি I একটা open interval হয়, তবে local maximum-এর সংজ্ঞাটা আরেকটু সহজে লেখা যায়--

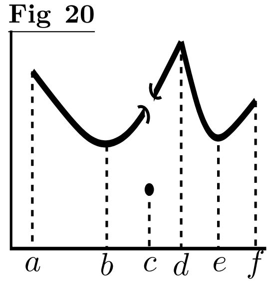
$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \quad f(x) \leq f(a)$$

মানে $N(a, \delta) \cap I$-এর বদলে খালি $N(a, \delta)$. কারণ I open হলে এমন δ পাব যাতে $N(a, \delta) \subseteq I$ হয়। একইরকম কথা local minimum-এর বেলাতেও খাটে।

Exercise 4: Prove or disprove: The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{if } x < 2 \\ x^2 - x & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$$

Fig 20



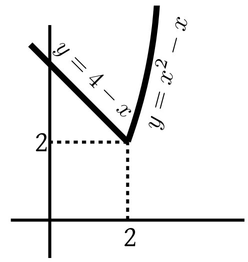


Fig 21

has a local minimum at $x = 2$.[3] ■

HINT:

প্রথমে গ্রাফটা এঁকে নিলে বুঝতে পারব কোন পথে এগোতে হবে। Fig 21 দেখলেই বুঝবে যে সত্যিই একটা local minimum আছে। শুধু local minimum-ই নয়, আসলে ওখানে global minimum-ও আছে।

Yes, there is a local minimum at $x = 2$. In fact, there is a global minimum there, *i.e.*,

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(2).$

Take any $x \in \mathbb{R}$.

Case 1: If $x < 2$ then

$$f(x) = 4 - x > 4 - 2 = 2 = f(2),$$

as required.

Case 2: If $x \geq 2$ then $x - 1 \geq 2 - 1 = 1$. So

$$f(x) = x^2 - x = x(x-1) \geq 2 \times 1 = 2 = f(2),$$

as required.

DAY 2
Definition

এবার আমরা অংকের ভাষায় differentiation-এর definition লিখব।

DEFINITION: Differentiability

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be any interval. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be any function, and let a be any point of I. Then f is called differentiable at $x = a$ if

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

exists *finitely.* This limit is called the derivative of $f(x)$ at $x = a$, and denoted by $f'(a)$.

যদি আমরা $h \to 0-$ নিতাম তাহলে পেতাম left differentiability-র সংজ্ঞা। একইভাবে $h \to 0+$ নিলে পেতাম right differentiability.
যদি $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ হয়, আর আমরা বলি যে, $f(x)$ হল $x = a$-তে differentiable, তবে বুঝতে হবে যে আমরা right differentiability-র কথা বলছি, কারণ $x = a$-র বাঁদিকে function-টা defined-ই নয়। একইভাবে $x = b$-তে এমনি differentiability আর left differentiability সমার্থক।
অনেক সংজ্ঞা-টংজ্ঞা শেখা হল, এবার একটু অংক কষা যাক। আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে খালি সেইসব function-কেই differentiate করতাম, যারা differentiable. সেই ছোটোবেলায় differentiable না হওয়ার সম্ভাবনাটাই আমাদের মাথায় থাকত না। এবার এমন কিছু function দেখব যেগুলো differentiable কি না সেটা বার করতেই কিছুটা কসরৎ লাগবে।

Example 2: Is $f(x) = |x|$ differentiable at $x = 0$?

SOLUTION:
Fig 22 থেকে বোঝা যাচ্ছে যে differentiable হবে না। দেখি সেটা প্রমাণ করতে পারি কিনা।

To check if

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

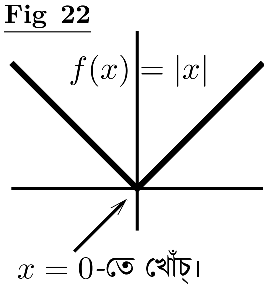
exists finitely.

লক্ষ কর যে

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{if } h > 0 \\ -1 & \text{if } h < 0 \end{cases}.$$

তাই limit-টা যদি বাঁদিকে থেকে নিই (মানে $h \to 0-$) তবে পাব -1, আর ডানদিক থেকে নিলে $(h \to 0+)$ পাব 1. যেহেতু $-1 \neq 1$ তাই limit-টা exist করে না।

Fig 22



Now

$$\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}.$$

So

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

does not exist. Hence $f(x)$ is not differentiable at $x = 0$.

■

Exercise 5: If

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

does $f'(0)$ exist? Justify your every step.[3] ■

HINT:

Fig 23 দেখলেই বুঝবে যে এই অংকটা গ্রাফ দেখে করা কঠিন। এখানে $x = 0$-র কাছে কোনো খোঁচ আছে কি নেই ঠিক বোঝা যাচ্ছে না। অতএব সরাসরি definition লাগানো ছাড়া পথ নেই।

To check if

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \text{ exists finitely.}$$

Now, for $h \neq 0$,

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\cos(1/h)}{h} = \cos\frac{1}{h},$$

which does not have a limit as $h \to 0$.

কেন limit-টা নেই সেটা বিস্তারিতভাবে প্রথম খণ্ডে আলোচনা করেছিলাম। এখানে সংক্ষেপে সেটা মনে করিয়ে দিই--

⟦ Because:

If we take $h_n = \frac{1}{2n\pi}$ and $h'_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ for $n \in \mathbb{N}$, then $h_n, h'_n \to 0$ but $\cos h_n \to 1$ while $\cos h'_n \to -1$.

⟧

Fig 23

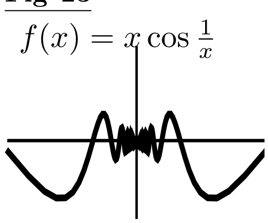
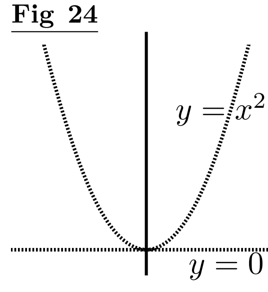


Fig 24



So $f'(0)$ does not exist.

একই কায়দায় নীচের অংকটা করো দেখি!

Exercise 6: If

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

does $f'(0)$ exist? Justify your every step. ■

Exercise 7: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Examine whether f is differentiable at $x = 0$.[2] ■

HINT:

এইরকম function-এর গ্রাফ আঁকা মুশকিল। তাও Fig 24-এ একটা চেষ্টা করেছি। একটু কল্পনাশক্তি মিশিয়ে বুঝতে হবে। গ্রাফটা যেন দুটো অংশ নিয়ে তৈরী--এক, $y = 0$ লাইনটা, মানে x-axis. আর দুই, $y = x^2$-এর গ্রাফটা। যখন $x \in \mathbb{Q}$ তখন $f(x)$ থাকবে $y = x^2$-এর গ্রাফের উপর। যদি $x \notin \mathbb{Q}$ হয় তবে $f(x)$ থাকবে $y = 0$-এর লাইনে। যেহেতু rational আর irrational সংখ্যারা $\mathbb{R}$-এর মধ্যে গিজ্‌গিজ্‌ করে মিশে আছে, তাই $f(x)$-এর value-গুলো একবার $y = 0$-এর উপরে এবং পরমুহূর্তেই লাফিয়ে $y = x^2$-এর গ্রাফে, তারপর ফের $y = 0$-এর উপরে, এইভাবে রয়েছে। কল্পনা করতে পারো যেন $y = 0$ লাইনটার মধ্যে অজস্র ফুটো, ঠিক যেখানে যেখানে rational সংখ্যা সেখানে সেখানে। একইভাবে $y = x^2$-এর গ্রাফেও অজস্র ফুটো, খালি এই ফুটোগুলো irrational-দের জন্য।
এই দুই অংশের দেখা হচ্ছে $x = 0$-তে এসে। এইখানে $y = 0$ আর $y = x^2$ দুজনেই একই value (মানে 0) নেয়। দুজনেরই derivative-ও এখানে সমান (দুজনেরই 0). তাই $x = 0$-তে $f(x)$ অবশ্যই differeniable হবে। এইবারে এই কথাটাকেই অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখতে হবে।

Yes, f is differentiable at $x = 0$.

Shall show

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

i.e.,

Target $\quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(0, \delta) \quad |[|\frac{f(x)}{x}|]| < \epsilon.$

$\forall \epsilon$ Take $\epsilon > 0$.

$\exists \delta$ Choose $\delta = \epsilon$.

$\forall x$ Take any $x \in N'(0, \delta)$.

এবার দুটো কেসে ভেঙে এগোব।

Case 1: If $x \in \mathbb{Q}$ then

$|[|\frac{f(x)}{x}|]| = |[|\frac{x^2}{x}|]| = |x| < \delta = \epsilon$, as required.

Case 1: If $x \notin \mathbb{Q}$ then

$|[|\frac{f(x)}{x}|]| = |[|\frac{0}{x}|]| = 0 < \epsilon$, as required.

এই অংকটা যদি বুঝে থাকো তবে নীচের অংকের ধাঁধা কয়টাও একটু মাথা খাটালেই হয়ে যাবে।

Exercise 8: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে এমন একটা করে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দাও যাতে--

1. $f(x)$-টা x-এর ঠিক একটা value-তেই continuous হয়, এবং সেখানে differentiable-ও হয়।
2. $f(x)$-টা x-এর ঠিক দুটো value-তেই continuous হয়, এবং সেই দুই জায়গায় differentiable-ও হয়।
3. $f(x)$-টা x-এর ঠিক দুটো value-তেই continuous হয়, এবং তাদের মধ্যে ঠিক এক জায়গায় differentiable হয়।

■

Exercise 9: ধরো $p(x) = f(x) + g(x)$. যদি কোনো $x = a$-তে $f(x)$ আর $g(x)$ দুজনেই differentiable হয় তবে $p(x)$-ও সেখানে differentiable হবে এবং $p'(a) = f'(a) + g'(a)$ হবে। এটা definition ব্যবহার করে প্রমাণ কর। এই কথাটা কাজে লাগবে--

$$\frac{p(a+h)-p(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

■

একইভাবে $p(x) = f(x) - g(x)$ হলেও করা যেত। কিন্তু $p(x) = f(x)g(x)$ বা $p(x) = f(x)/g(x)$ হলে আরেকটা জিনিস ব্যবহার করতে হত, যেটা আমরা কালকে শিখব।

Exercise 10: এমন একটা উদাহরণ দাও যেখানে $p(x) = f(x) + g(x)$, আর $f'(0), g'(0)$ কেউই exist করে না (মানে $f(x), g(x)$ কেউই $x = 0$-তে differentiable নয়), অথচ $p'(0)$ দিব্যি exist করে! ■

অনেক function-কে বার বার differentiate করা যায়, যেমন $\sin x$-কে একবার differentiate করলে হয় $\cos x$, আরেকবার differentiate করলে হয় $-\sin x$, আরও একবার করলে হয় $-\cos x$, ইত্যাদি। এখানে আমরা লিখে থাকি

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x, \ldots$$

নীচের অংকটা এরকম বারবার differentiate করা নিয়ে। অংকটা দেখতে লম্বা, কিন্তু কঠিন কিছু নয়।

Exercise 11: If $y = x^3/(x^2-1)$ then prove that

$$(y_n)_0 = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ -n! & \text{otherwise} \end{cases} \quad n > 1,$$

where $(y_n)_0$ has its usual meaning.[4] ■

HINT:
এখানে $(y_n)_0$ মানে হল y-কে x দিয়ে n বার differentiate করে $x = 0$ বসানো। অংকের ভাষায়--

Let $y = f(x) = x^3/(x^2-1)$.
Then $(y_n)_0 = f^{(n)}(0)$.

এই $(y_n)_0$ চিহ্নটা মোটেই খুব প্রচলিত notation নয়।
এখানে $f(x)$-টাই দেখতে বেশ বিচ্ছিরি, তাকে n বার differentiate করার কথা ভাবলেই গায় জ্বর আসে। আসলে কিন্তু $f(x)$-টা তত কঠিন কিছু নয়, খানিকটা দলাইমলাই করলেই বেশ সহজ হয়ে আসে--

Now

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{(x^2-1)} \\ &= \frac{x^3}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^3}{x+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3-1+1}{x-1} - \frac{x^3+1-1}{x+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left\{x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right\} - \left\{x^2-x+1+\frac{1}{x+1}\right\}\right] \\ &= x + \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{g(x)} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{h(x)}\right] \end{aligned}$$

সুতরাং $f(x)$-কে দুটো অংশে ভেঙে ফেলেছি $g(x)$ আর $h(x)$, যারা দুজনেই বেশ ভদ্র দেখতে।

Thus, for $n > 1,\ f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}(g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0))$.

এবার $g^{(n)}(x)$ বার করব। প্রথমে $g'(x), g''(x), g^{(3)}(x)$ বার করে তা থেকে একটা প্যাটার্ণ পাওয়া যায় কি না দেখি--

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}, \quad g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad g^{(3)}(x) = \frac{-2\times 3}{(x-1)^4}.$$

প্যাটার্ণটা হল--

Now for $n \geq 0$ we have

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}. \qquad (\mathbf{1})$$

এই ধরণের প্যাটার্ণ প্রমাণ করতে হয় induction দিয়ে। সংক্ষেপে লিখে দিই--

⟦ Because:

For $n=0,\ g^{(0)}(x)=g(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{(-1)^0 0!}{(x-1)^{0+1}}$.

Assuming $(\mathbf{1})$ for n,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}g^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}, \end{aligned}$$

which is again of the same form.

Hence $(\mathbf{1})$ holds for all $n \geq 0$ by induction.

⟧

ঠিক একইভাবে $h^{(n)}(x)$ বার করা যাবে--

Similarly, for $n \geq 0$, we have

$$h^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}. \qquad (\mathbf{2})$$

সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

Hence for $n > 1$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2}(g^{(n)}(0)-h^{(n)}(0)) \\ &= -\frac{(-1)^n n!}{2}(1-(-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even} \\ -n! & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

as required.

Exercise 12: If $y = x^{n-1}e^{1/x}$, prove that

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}.$$

[3] ■

HINT:

> We shall use induction on n.

Induction দিয়ে প্রমাণের তিনটে অংশ হয় সে তো জানোই, basis,hypothesis আর step.

> Basis: For $n=1$ we have $y=e^{1/x}$.
> So $y_1=-\frac{1}{x^2}e^{1/x}=\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}$,as required.
> For $n=2$ $y=xe^{1/x}$.
> So $y_1=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)$, and
> $$y_2=e^{1/x}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{e^{1/x}}{x^3}=\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}},$$
> as required.

লক্ষ কর এখানে basis-এ আমরা $n=1$ করেই খালি ছেড়ে দিই নি, $n=2$ অব্ধি গেছি। এটার দরকার আছে, সেটা এক্ষুণি বুঝবে।

> Hypothesis: Let us assume the result for $n=1,...,m$ for some $m\geq 2$.

যেহেতু $n=2$ পর্যন্ত basis-এর মধ্যে ধরা আছে, তাই এখানে $m\geq 2$ নিলাম।

> Step: Shall prove for $n=m+1$.
> Here $y=x^m e^{1/x}$.
> So
> $$y_1=mx^{m-1}e^{1/x}+x^m e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=mx^{m-1}e^{1/x}-x^{m-2}e^{1/x}.$$
> Let D^n denote differentiating n times w.r.t. x.
> Then
> $$y_n=D^m y_1=mD^m[x^{m-1}e^{1/x}]-D^m[x^{m-2}e^{1/x}].$$

এখানে $y_n=D^m y_1$ হল কারণ $n=m+1$, তাই n-বার differentiate করা মানে একবার differentiate করে উত্তরটাকে আরও m-বার differentiate করা।
এইবার induction hypothesis লাগাব--

> By induction hypothesis
> $$D^m[x^{m-1}e^{1/x}]=\frac{(-1)^m e^{1/x}}{x^{m+1}},$$
> and
> $$D^{m-1}[x^{m-2}e^{1/x}]=\frac{(-1)^{m-1}e^{1/x}}{x^m},$$

লক্ষ কর hypothesis-টা দুইবার লাগালাম, একবার m-র জন্য তারপর $m-1$-এর জন্য। ঠিক এই জন্যেই basis-এ $n=1$আর $n=2$ দুটোই করতে হয়েছিল।

So

$$\begin{aligned} D^m[x^{m-2}e^{1/x}] &= D\{D^{m-1}[x^{m-2}e^{1/x}]\} \\ &= D\{\frac{(-1)^{m-1}e^{1/x}}{x^m}\} \\ &= (-1)^{m-1}e^{1/x}[-mx^{-m-1} - x^{-m-2}] \\ &= (-1)^m e^{1/x}[mx^{-m-1} + x^{-m-2}]. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} y_n &= m\frac{(-1)^m e^{1/x}}{x^{m+1}} - (-1)^m e^{1/x}[mx^{-m-1} + x^{-m-2}] \\ &= (-1)^m e^{1/x}[mx^{-m-1} - mx^{-m-1} - x^{-m-2}] \\ &= (-1)^{m+1}e^{1/x}[x^{-m-2}], \end{aligned}$$

as required.

DAY 3
Basic theorems (part 1)

এবার তিনটে গুরুত্বপূর্ণ জিনিস শিখব যেগুলো ছবি এঁকে বোঝা খুব সহজ, এবং প্রমাণ করাও মোটেই শক্ত নয়। অথচ এই তিনটে যে কত কাজে লাগবে তার শেষ নেই।

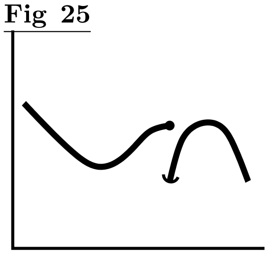
3.1 Continuity

Fig 25-এ একটা গ্রাফ রয়েছে। এখানে $f(x)$ কি differentiable? যদি আঙুল বোলাই তবে বলাই বাহুল্য যে ওই ভাঙা জায়গাটা মোটেই মসৃণ ঠেকবে না। মসৃণ হওয়ার জন্য অবশ্যই ভাঙা থাকলে চলবে না, মানে differentiable হতে হলে continuous-ও হতে হবে। এইটাই আমাদের প্রথম গুরুত্বপূর্ণ theorem.

Theorem

Let $f(x)$ be differentiable at $x = a$. Then $f(x)$ must be continuous at $x = a$.

Fig 25



Proof: দেওয়া আছে যে, $x = a$-তে $f(x)$ হল differentiable. তার মানে differentiability-র সংজ্ঞা থেকে লিখতে পারি--

> Given:
> $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ exists finitely, } = \ell, \text{ say.}$$

এবার লিখি কি দেখাতে হবে--

> To show $f(x)$ is continuous at $x = a$, *i.e.*,
> $$\lim_{x\to a} f(x) \text{ exists and } = f(a).$$

লক্ষ কর এখানে আমরা ϵ-δ-ওয়ালা মূল definition-টা লিখি নি। সেটা লিখেও অবশ্যই অংকটা করা যায়, কিন্তু এই অংকটা এতই সহজ যে limit ব্যবহার করে লিখলেই হবে। মূল definition-টা যেন বাড়ির ভিত, খুব তুলকালাম কাণ্ড না হলে বাড়ির ভিত অব্দি খুঁড়ে তোলার দরকার পড়ে না।
আমাদের দেখাতে হবে $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, বা ঘুরিয়ে বললে $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$. এর জন্য প্রথমে আমরা $f(x) - f(a)$-কে $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ দিয়ে লিখি--

> Now
> $$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a)$$

লক্ষ কর যে ডানদিকের দুটো জিনিসের limit-ই আমরা জানি, আর বাঁদিকেরটার limit বার করতে হবে।

> $$\because \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \text{ and } \lim_{x\to a}(x-a) = 0.$$
> $\therefore$ Multiplying,
> $$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \ell \times 0 = 0.$$
> Thus
> $$f(x) \to f(a),$$
> as required.

[Q.E.D]

একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে, যদি আমরা left-hand বা right-hand limit নিতাম তাহলেও একই রকম কথা বলা যেত। নীচের অংকে সেটাই করতে বলেছে।

Exercise 13: Show that if $f(x)$ is left (or right) differentiable at $x = a$, then $f(x)$ must be left (or right) continuous at $x = a$. ■

Exercise 14: হায়ার সেকণ্ডারীতে differentiation-এর product rule শিখেছিলে, মনে আছে? যদি $f(x), g(x)$ দুটো function হয় যারা দুজনেই $x = a$-তে differentiable, তবে $p(x) = f(x)g(x)$-ও differentiable, এবং

$$p'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

এটা প্রমাণ কর তো। শুরুটা ধরিয়ে দিচ্ছি। দেখাতে হবে যে $\lim_{x\to a}\frac{p(x)-p(a)}{x-a}$ exist করে। লক্ষ কর যে

$$\begin{aligned} p(x)-p(a) &= f(x)g(x)-f(a)g(a) \\ &= f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a). \end{aligned}$$

মনে রেখো যে $g(x)$ যেহেতু $x=a$-তে differentiable, তাই সেখানে continuous-ও বটে, ফলে $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$. ব্যস্ আর কিছু বলে দেব না। এবার করতে পারা উচিত। ■

Exercise 15: ধরো $f(x)$ এমন একটা function যেটা $x=a$-তে differentiable, এবং $f(a)\neq 0$. এবার যদি $p(x)=\frac{1}{f(x)}$ নিই, তাহলে দেখাও যে $p(x)$-ও $x=a$-তে differentiable, এবং

$$p'(a)=-\frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

■

Exercise 16: এবার ধরো $f(x)$ আর $g(x)$ দুটো function নিলাম, দুজনেই $x=a$-তে differentiable, এবং $g(a)\neq 0$. তাহলে উপরের দুটো অংক ব্যবহার করে দেখাও যে যদি $p(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ নিই, তবে $p(x)$-ও $x=a$-তে differentiable, এবং

$$p'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

■

এরকম আরেকটা জিনিসও আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে শিখেছিলাম--chain rule. একটা উদাহরণ মনে করে নিই।

Example 3: $\sin(x^2)$-কে differentiate করলে কি পাবে?

SOLUTION: এখানে sin-এর পেটে x^2 ঢুকে আছে। এরকম function-দের বেলাতেই chain rule কাজে দেয়। প্রথমে বাইরের function-টা (মানে sin)-কে differentiate করে পাবো cos. এবার তার মধ্যে ভিতরের function-টা (মানে x^2)-কে অপরিবর্তিতভাবে ঢুকিয়ে দেব, ফলে পাব $\cos(x^2)$. এবার একে গুণ করব ভিতরের function-টার derivative দিয়ে, মানে $2x$ দিয়ে। সুতরাং সবমিলিয়ে উত্তর হবে $2x\cos(x^2)$. ■

এই কায়দাটা কেন কাজ করে, এবং তার জন্য কি কি শর্ত লাগে আর হদিশ দেব এবার।

Chain rule

Let $f(x), g(x)$ be two functions such that $f(g(x))$ is well-defined over a neighbourhood of some point a. If $g(x)$ is differentiate at $x=a$, and $f(x)$ is differentiable at $x=g(a)$, then $f(g(x))$ is differentiable at $x=a$ and

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(a))g'(a).$$

শর্তগুলো লক্ষ কর। একেবারে যেটুকু না হলে নয়, তার বেশী কোনো শর্ত চাপাই নি। যেমন $f(g(x))$ যদি wekk-defined-ই না হয়, তবে আর তাকে differentiate করার প্রশ্ন উঠবে কি করে? যেমন $\log(-x^2)$-এর মানেই হয় না, কারণ $-x^2 \leq 0$, এবং non-positive সংখ্যাদের জন্য log নামক function-টা defined-ই নয়! তারপর $g'(a)$ এবং $f'(g(a))$ না থাকলে chain rule লাগানো অসম্ভব হত, তাই ওদের অস্তিত্বটুকু ধরে নিতেই হয়েছে।
এবার তবে প্রমাণে হাত দিই। ছোট্টো প্রমাণ, কিন্তু একটা প্যাঁচ আছে। আগে প্যাঁচটা বলে নিই। আমরা কাজটা করতে চাই এইভাবে--

$$\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)} \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}. \qquad (*)$$

দেখতেই পাচ্ছ $x \to a$ হলে ডানদিকের দ্বিতীয় অংশটা $g'(a)$-তে যাবে। প্রথম অংশটার জন্য লক্ষ কর যে $g(x) \to g(a)$ হবে (কারণ g-টা a-তে differentiable হওয়ার সুবাদে continuous-ও বটে)। সুতরাং ডানদিকের প্রথম অংশটা যাবে $f'(g(a))$-তে। ব্যস্ হয়ে গেল! না, পুরো হয়ে যায় নি, এবং প্যাঁচটা সেখানেই। ওই যে $g(x)-g(a)$ দিয়ে ভাগ আর গুণ করে দিলাম, সেটা কি সত্যিই সব সময়ে করা যায়? যদি $g(x)-g(a)=0$ হয় যায়? আমরা যখন $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$ করি তখন নিশ্চিন্তে $x \neq a$ ধরে $x-a$ উপর-নীচ থেকে কেটে দিতে পারি, কারণ $x \to a$ মানে $x \neq a$নিয়ে কাজ হচ্ছে। কিন্তু $x \neq a$ হলেই যে $g(x) \neq g(a)$ হবে এমন মাথার দিব্যি তো কেউ দেয় নি! যেমন $g(x)$ তো একটা constant function-ও হতে পারে! এর জন্য আমরা একটু সাবধানে এগোব। মূল ধারণাটা একই থাকবে, খালি (*)-কে একটু আইন বাঁচিয়ে লিখব যাতে $g(x)=g(a)$ হয়ে গেলেও বিপদে না পড়ি।

> Proof: For $x \neq a$ we write
>
> $$\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = A(x) \times \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{B(x),\ \text{say}},$$
>
> where
>
> $$A(x) = \begin{cases} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)} & \text{if } g(x) \neq g(a) \\ f'(g(a)) & \text{if } g(x) = g(a). \end{cases}$$

প্যাঁচটা দেখলে। $g(x)=g(a)$ হলে পরে $A(x)=f'(g(a))$ নিয়েছি। এবার দেখাব যে $B(x) \to g'(a)$আর $A(x) \to f'(g(a))$.

> Since $g'(a)$ exists, hence $B(x) \to g'(a)$ as $x \to a$.

এবার $A(x) \to f'(g(a))$ দেখানোর পালা। যুক্তিটা এইরকম--যদি $g(x) \neq g(a)$ হয়, তবে যে ঝামেলা নেই সেটা আগেই দেখেছি। আর যদি $g(x)=g(a)$ হয়ে যায় তবে তো $A(x)=f'(g(a))$ ধরেই নিয়েছি।

> Shall show $A(x) \to f'(g(a))$ as $x \to a$, ie,
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(a,\delta) \quad |A(x)-f'(g(a))| < \epsilon.$$
>
> $\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.
> Since $f'(g(a))$ exists,
>
> $$\exists h > 0 \quad \forall y \in N'(g(a),h) \quad |[|\frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)} - f'(g(a))|]| < \epsilon.$$

Also $g(x)$ is continuous at $x = a$ (since it is differentiable). So

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \quad g(x) \in N(g(a), h).$$

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N(a, \delta)$.

Then $g(x) \in N(a, h)$.

এইবারই সেই দুটো কেস, $g(x) \neq g(a)$ আর $g(x) = g(a)$:

Case 1: If $g(x) \neq g(a)$ then $g(x) \in N'(g(a), h)$ and so $|A(x) - f'(g(a))| < \epsilon$, as required.

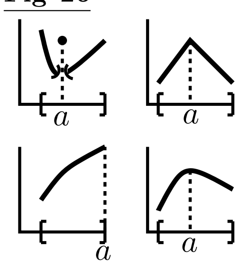
Case 2: If $g(x) = g(a)$, then $A(x) = f'(g(a))$,and so $|A(x) - f'(g(a))| < \epsilon$, as required.

3.2 Fermat's theorem

Fig 26-এ চারটে গ্রাফ রয়েছে। প্রতি ক্ষেত্রেই $x = a$-তে একটা local maximum আছে। কিন্তু চারটে local maximum চার রকমের। প্রথম ক্ষেত্রে $x = a$-তে function-টা continuous নয়, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে continuous কিন্তু differentiable নয়। বাকী দুই ক্ষেত্রেই function-টা differentiable (কারণ গ্রাফ দুটোই smooth). এদের মধ্যে তৃতীয় ক্ষেত্রে $x = a$ রয়েছে function-টার domain-এর এক প্রান্তে। আর চতুর্থ ক্ষেত্রে $x = a$ রয়েছে মাঝামাঝি জায়গায়। আমরা এখন যে theorem-টা আলোচনা করব সেটা এই চতুর্থ ক্ষেত্রের জন্য। লক্ষ কর $x = a$-তে একটা local maximum থাকায় গ্রাফটা $x = a$-র বাঁদিকে উপরে উঠছে, এবং $x = a$-র ডানদিকে নেমে যাচ্ছে। ঠিক $x = a$-তে গ্রাফটা উঠছেও না, নামছেও না। তাই সেখানে একটা stationary point-এর সৃষ্টি হয়েছে, মানে $f'(a) = 0$. লক্ষ কর যে এই কথাটা কিন্তু বাকী তিন ক্ষেত্রে খাটে না। প্রথম দুই ক্ষেত্রে $f'(a)$ তো exist-ই করে না, আর তৃতীয় ক্ষেত্রে $x = a$-এর ডানদিকে গ্রাফটা নেই বলে সেখানেও $f'(a) = 0$ হবার কোনো কারণ নেই।

ঠিক একই কথা বলা যায় local minimum-এর ক্ষেত্রেও। এই ব্যাপারটারই একটা গালভরা নাম হল Fermat's theorem, যেটা এবার আমরা শিখব। এই প্রসঙ্গে বলে রাখি যে Fermat (ফার্মা) নামের ফরাসী ভদ্রলোক জীবনে এতরকম theorem বার করেছেন যে খালি Fermat's theorem বললে কোনটা বোঝানো হচ্ছে সেটা স্পষ্ট হয় না। আমরা যে theorem-টার কথা বলছি সেটা আসলে Fermat-র অপেক্ষাকৃত অখ্যাত theorem-গুলোর একটা।

Fig 26



Fermat's theorem

Let $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ be any function, and let $c \in (a, b)$ be any number. If

- $f'(c)$ exists, and
- $f(x)$ has a local extremum at $x = c$,

then $f'(c) = 0$.

Proof: বলেছে যে $x = c$-তে একটা local extremum আছে, মানে হয় local maximum নয় local minimum আছে। দুই ক্ষেত্রেই প্রমাণটা একইরকম, তাই আমরা খালি local maximum-এর কেসটা করব।

> Without loss of generality, let $f(x)$ have a local maximum at $x = c$.

এখানে এই "without loss of generality" কথাটা লক্ষ কর। এর মানে হল যে খালি local maximum নিয়ে কাজ করছি বলে আসলে কিছু কম করছি না, general case-টাও একই যুক্তিতে হবে।
এবার লিখে নিই local maximum-এর সংজ্ঞা কি--

> ie,
> $$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta) \quad f(x) \leq f(c).$$

এবার $N(c, \delta)$-র মধ্যে অন্য যে কোনো point x নাও, তবে $f(x) \leq f(c)$ হবে। ছবিতে local maximum-দের দেখতে হয় টিপির চূড়ার মত (Fig 27). এবার c-র বাঁদিকে একটা x নিলাম, $N(c, \delta)$-র মধ্যেই। যদি $f(x)$ আর $f(c)$ দিয়ে ছবির মত একটা chord টানি, তবে তার slope অবশ্যই ≥ 0 হতে বাধ্য। যদি x থাকত c-র ডানদিকে (Fig 28) তবে slope-টা হত ≤ 0.
এবার x যতই c-র কাছে আসবে (ডান বা বাঁ যেদিকে থেকেই হোক) ততই chord-টার slope ক্রমশঃই $f'(c)$ দিকে যাবে। প্রথমে ডানদিক থেকে এগোব--

> So
> $$\forall x \in (c, c + \delta) \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$
> $$\because f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ exists,}$$

Fig 27

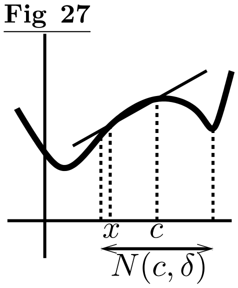
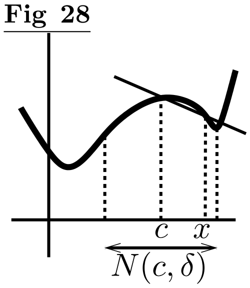


Fig 28



$$\therefore f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \qquad (\mathbf{1})$$

মনে রেখো যে $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ যদি exist করে তার মানে $\lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ আর $\lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ দুজনেই exist করে এবং সমান হয়।
এবার বাঁদিক থেকে আক্রমণ করব--

Similarly,

$$\forall x \in (c - \delta, c) \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

and hence

$$f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \qquad (\mathbf{2})$$

সুতরাং ডানদিক বাঁদিক মিলিয়ে দাঁড়ালো--

$\therefore$ Using $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{2})$, $f'(c) = 0$, as required.

[Q.E.D]

এখানে আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে $f(x)$-এর domain হল একটা open interval (a, b). যদি domain-টা open interval না হয়ে $[a, b]$ বা $[a, b)$ বা $(a, b]$ জাতীয় হত তবেও একইরকম কথা বলা যেত। খালি তখন আমাদের কাজ করতে হত interior point নিয়ে (মানে প্রান্তের বিন্দুগুলোকে এড়িয়ে)। Fig 29 দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

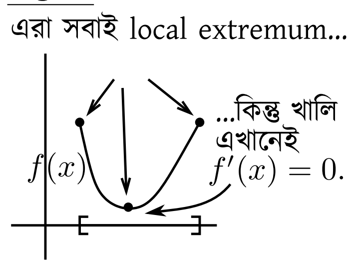
Exercise 17: Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be any interval and $f : I \to \mathbb{R}$ be any function. Let c be any <u>interior</u> point of I. If

- $f'(c)$ exists, and
- $x = c$ is a local extremum of $f(x)$

then $f'(c) = 0$. Prove this. ■

Exercise 18: Prove that if a function f has a local extremum at a point x_0 in its domain then either $f'(x_0) = 0$ or $f'(x_0)$ does not exist.[3] ■

<u>Fig 29</u>



HINT:
এই অংকটায় একটু সমস্যা আছে। বলে দেয় নি যে x_0-টা domain-এর কোথায় আছে। যদি এক প্রান্তে থাকে তবে কিন্তু অংকটা ভুল। আমরা ধরে নেব যে x_0 হল domain-এর একটা interior point. সে কথাটা লিখে নিয়ে শুরু করি--

> We shall assume that x_0 is an interior point of the domain.

আমাদের দেখাতে বলেছে হয় "$f'(x_0) = 0$" নয় তো "$f'(x_0)$ does not exist". এরকম "হয় এটা নয় ওটা" জাতীয় জিনিস প্রমাণ করার কায়দা হল, যে কোনো একটা নয় ধরে নিয়ে অন্যটা প্রমাণ করা। আমরা এখানে "$f'(x_0)$ does not exist" নয় ধরে নিয়ে (মানে $f'(x_0)$ exist করে ধরে নিয়ে) দেখাব যে $f'(x_0) = 0$ হতে বাধ্য।

> Let f have a local extremum at x_0. Let $f'(x_0)$ exist.
> Shall show that $f'(x_0) = 0$.

এর পর থেকে অংকটা আসলে Fermat's theorem-এর প্রমাণ ছাড়া আর কিছুই নয়--

> Without loss of generality, let x_0 be a local maximum.
> ie,
> $$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N(x_0, \delta) f(x) \leq f(x_0),$$
> Since x is an interior point of the domain of $f(x)$.
> $$\therefore \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$
> $$\because f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ exists,}$$
> $$\therefore f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (\mathbf{1})$$
> Again
> $$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$
> and hence
> $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (\mathbf{2})$$
> $\therefore$ Using $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{2})$, $f'(x_0) = 0$, as required.

এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান! যদি $x = a$-তে $f(x)$-এর local extremum থাকে অমনি যেন লিখে বোসো না যে $f'(a) = 0$ হবেই। এমন হতেই পারে যে $x = a$-তে $f(x)$-টা differentiable পর্যন্ত নয়! এই কথাটা মনে করিয়ে দেওয়ার জন্য নীচের অংকটা ভালো।

Exercise 19: For each of the following statements cite a function that satisfies:

1. f is differentiable at a point, but has no local extremum at that point
2. f has no derivative at a point, and has a local extremum at that point

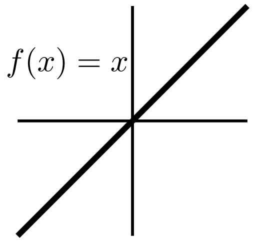


Fig 30

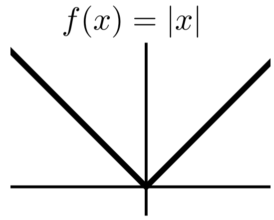


Fig 31

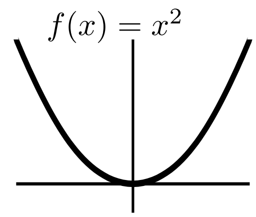


Fig 32

3. f has a derivative at a point, and has a local extremum at that point

[3] ■

HINT:
প্রথম অংশের জন্য Fig 30 দ্যাখো।

> 1) We can take $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = x$. Then at the point $x = 0$ $f'(x)$ exists $(f'(0) = 1)$.
>
> But f has no local extremum at $x = 0$, since $\forall x < 0$ $f(x) < f(0)$ and $\forall x > 0$ we have $f(x) > f(0)$.

পরের অংশের জন্য গ্রাফটা হল Fig 31.

> 2) Here we may take $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = |x|$. Then at the point $x = 0$ $f'(x)$ does not exist since
>
> $$\lim_{h \to 0+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1 \text{ and } \lim_{h \to 0-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = -1.$$
>
> But $f(x)$ has a local minimum at $x = 0$, since
>
> $$\forall x f(x) = |x| \geq 0 = f(0).$$

সবশেষের অংকটার জন্য লাগবে Fig 32.

> 3) Here we can take $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = x^2$. Then at the point $x = 0$ $f'(x)$ exists $(f'(0) = 0)$.
>
> Also $f(x)$ has a local minimum at $x = 0$, since
>
> $$\forall x f(x) = x^2 \geq 0 = f(0).$$

3.2.1 Necessary না sufficient?

অংকের জগতে necessary আর sufficient শব্দদুটোর বহুল ব্যবহার। এদের কোনটার মানে কি সেটা নিয়ে অনেক ছাত্রই ধন্দে থাকে। এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে আমরা শিখেছিলাম যে যদি $A \implies B$ হয় (যেখানে A, B যেকোনো দুটো বক্তব্য) তবে আমরা বলি

A is sufficient for B, বা ঘুরিয়ে, B is necessary for A.

যেমন যদি বলি "ভালো করে পড়াশোনা করলে পরীক্ষা ভালো হয়," তবে সেটাকে লিখতে পারি

$$A \implies B,$$

যেখানে

$A =$ ভালো করে পড়াশোনা করা

$B =$ পরীক্ষায় ভালো করা।

এখানে আমরা বলবে যে "ভালো করে পড়াশোনা করা" is sufficient for "পরীক্ষায় ভালো করা।" একইভাবে এটাও বলতে পারি যে, "পরীক্ষায় ভালো করা" is necessary for "ভালো করে পড়াশোনা করা।"
দুঃখের ব্যাপার যে এই উদাহরণে $B \implies A$ মোটেই বলা যায় না। প্রশ্ন কমন পেয়ে গিয়ে অনেক ফাঁকিবাজ ছাত্রের বরাতেই মাঝে মধ্যেই পরীক্ষার শিকে ছিঁড়ে যায়। তাই "ভালো করে পড়াশোনা করা" is necessary for "পরীক্ষায় ভালো করা" এমন কথা এই বাজারে জোর দিয়ে বলতে পারি না!
অংকের সব theorem-এরই মূল কাঠামো হল এই $A \implies B$-এর মত-- if অমুক অমুক শর্ত (A) পালিত হয়, then তমুক কিছু একটা (B) হবে। তাই যে কোনো theorem-কেই necessary আর sufficient-এর ভাষায় লেখা যায়। আমরা ঠিক এই কাজটাই এবার করব Fermat's theorem নিয়ে। এই theorem-এ আমরা কাজ করছি এমন একটা $f(x)$ নিয়ে যেটা $x = c$-তে differentiable. তাহলে এই theorem-এর বক্তব্য হল

$$\begin{gathered} f(x) \text{ has a local extremum at } x = c \\ \Downarrow \\ f'(c) = 0. \end{gathered}$$

তার মানে "$f'(c) = 0$" হল "$x = c$-তে একটা local extremum থাকা"-র জন্য একটা necessary condition.
প্রশ্ন হল, এর উল্টোটাও কি সত্যি? মানে এটা কি একটা sufficient condition-ও বটে? Fermat's theorem এ বিষয়ে নীরব। কিন্তু একটা শর্ত necessary হলেই যে সেটা আর sufficient হতে পারবে না এমন কোনো কথা নেই। সুতরাং একটু পরীক্ষা করে দেখা দরকার। এই প্রসঙ্গে বলে রাখি যে, যে কোনো theorem-এরই $\implies$ চিহ্নটাকে উল্টে $\impliedby$ করে দিলেও ঠিক থাকে কিনা সেটা পরীক্ষা করে দেখা গণিতজ্ঞদের একটা স্বভাব। এই কাজ করতে গিয়ে অংকের অনেক নতুন তথ্য আবিষ্কার হয়েছে।
নীচের অংকে আমাদের কাজ হল পরীক্ষা করে দেখা যে, Fermat's theorem-কে উল্টে দিলেও ধোপে টেঁকে কি না।

Exercise 20: Does $f'(c) = 0$ always imply the existence of an extremum of $f(x)$ at $x = c$? Justify.[2] ■

HINT:

> No, $f'(c) = 0$ does not always imply the existence of an extremum of $f(x)$ at $x = c$.
>
> <u>Counterexample:</u> $f(x) = x^3$ and $c = 0$.
>
> Then $f'(c) = 3c^2 = 0$.
>
> But $f(x) < 0$ if $x < c$ and $f(x) > 0$ if $x > c$. So there is no extremum at $x = c$.

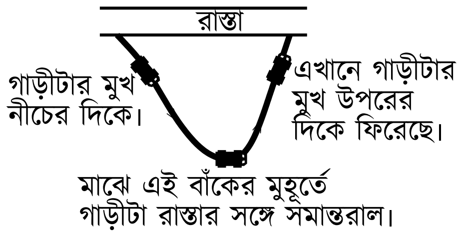


Fig 33



Fig 34

DAY 4
Basic theorems (part 2)

4.1 Rolle's theorem

এইবার আমরা এমন একটা theorem শিখতে চলেছি যার প্রভাব সুদূরপ্রসারী। ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বোঝার পক্ষে আদর্শ। Fig 33 দ্যাখো। এখানে একটা গাড়ি সোজা রাস্তা দিয়ে যাচ্ছিল, হঠাৎ কি খেয়াল হয়েছে, রাস্তা ছেড়ে খানিকক্ষণ এদিক ওদিক করে অবশেষে ফের রাস্তায় ফিরে এসেছে। গাড়ীটা যখন রাস্তা ধরে চলছিল, ততক্ষণ তার মুখ ছিল রাস্তা বরাবর। একবার রাস্তা ছাড়ার পর আবার রাস্তায় ফেরার জন্য গাড়ীটাকে অন্ততঃ একবার মোড় ফিরতে হয়েছে। মোড় নেওয়ার সময়ে গাড়ীটার মুখ একবার রাস্তার সমান্তরাল হতে বাধ্য। গাড়ীটা একাধিক বারও এরকম মোড় নিয়ে থাকতে পারে (যেমন Fig 34) কিন্তু অন্ততঃ একটা মোড় থাকবেই! ঠিক এই কথাটাই হল Rolle's theorem. এবার ব্যাপারটা অংক দিয়ে বোঝা যাক।
Fig 35-তে আমরা Fig 34-র পথটাই আবার এঁকেছি, খালি গাড়ীটাকে না দেখিয়ে। আমরা x-axis নিয়েছি রাস্তার সমান্তরাল। গাড়ীর পথটাকে ধরেছি একটা function $f(x)$-এর গ্রাফ। গাড়ীটা $x = a$-তে রাস্তা ছেড়েছে, এবং $x = b$-তে রাস্তায় ফিরে এসেছে, তাই $f(a) = f(b)$. এবার ধরো গাড়ীটা P বিন্দুতে পৌঁছে মোড় ঘুরছে। তখন গাড়ীর মুখটা আছে P বিন্দুতে $f(x)$-এর tangent বরাবর। এই tangent-এর slope হল $f'(x)$. যেহেতু গাড়ীটা এই মুহূর্তে রাস্তার সমান্তরাল, মানে x-axis-এর সমান্তরাল, তাই $f'(x) = 0$. লক্ষ কর গাড়ীটা যে পথেই যাক, এমনটা হতে বাধ্য। অর্থাৎ $f(a) = f(b)$ হলেই এমন কোনো $x \in (a, b)$ পাব যাতে $f'(x) = 0$ হয়। এটাই হল মোটামুটিভাবে Rolle's theorem-এর বক্তব্য।
এখানে অবশ্য $f(x)$-কে differentiable হতে হবে। নইলে আর $f'(x)$ আসবে কোথা থেকে? Differentiable না হলে কি হতে পারত সেটা বোঝার জন্য Fig 36 দ্যাখো। এখানে একটা খোঁচ আছে, এবং গাড়ীটা সেই খোঁচের মাথায় গিয়ে মোড় ঘুরেছে। বাস্তবে অবশ্য কোনো গাড়ী কি এরকম পথে চলতে পারে না। তাই যদি চলত তবে মোড় ঘোরার পূর্বমুহূর্তে গাড়ীটা থাকত Fig 37-র মত, মোড় ঘুরেই চোখের পলকে সেটা হয়ে যেত Fig 38-এর মত। সেটা অবশ্যই সম্ভব নয়। বা অন্যভাবে বললে গাড়ীর পথকে সবসময়ে smooth হতে হবে, মানে $f(x)$-কে সবসময়ে differentiable হতে হবে।
এবার আমরা তাহলে Rolle's theorem-টা অংকের ভাষায় লিখে ফেলতে পারি--

Exercise 21: State Rolle's theorem. ■

Fig 35

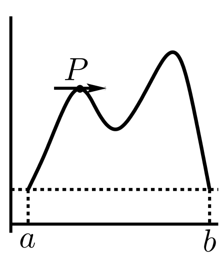


Fig 36

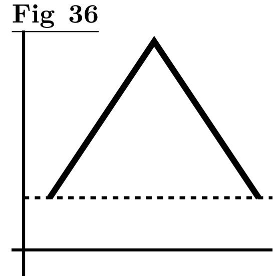
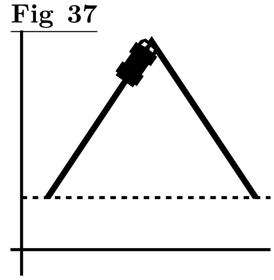


Fig 37



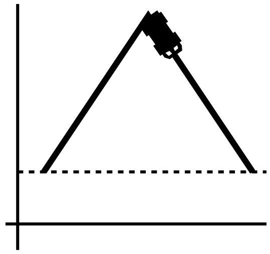


Fig 38

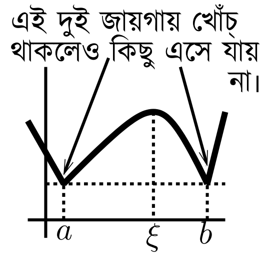


Fig 39

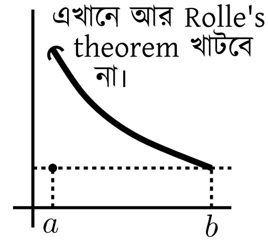


Fig 40

HINT:

> **Rolle's theorem**
>
> Let $f(x)$ be a function such that
>
> - it is continuous on $[a, b]$,
> - it is differentiable on (a, b), and
> - $f(a) = f(b)$.
>
> then
> $$\exists \xi \in (a, b) \quad f'(\xi) = 0.$$

আমরা এক্ষুণি এটা প্রমাণ করব, আগে শর্তগুলো ভালো করে বুঝে নিই। একটা শর্ত রয়েছে--"continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b)." এটা নিয়ে অনেক ছাত্রই থতমত খেয়ে যায়, continuity-র বেলায় closed interval, আর differentiability-র বেলায় open interval কেন? সেটা বোঝা যাক।

- যদি (a, b)-র মধ্যে কোথাও differentiable না হয় তবে কি বিপদ সেটা তো আগেই বলেছি (Fig 36). কোনো গাড়ীর চলার পথ অবশ্য এরকম হতে পারে না। যদি হত, তবে গাড়ীটাকে Fig 37-এর অবস্থান থেকে একলাফে Fig 38-এর অবস্থানে পৌঁছতে হত, যেটা অসম্ভব। লক্ষ কর যে, $f(x)$ যদি $x = a$ বা $x = b$-তে differentiable নাও হয় তাতেও আমাদের কিছু এসে যায় না (Fig 39).
- যেহেতু $f(x)$ function-টা (a, b)-র উপর differentiable তাই সেটা (a, b)-র সর্বত্র continuous হতেও বাধ্য। কিন্তু সেটাই যথেষ্ট নয়। যদি $x = a$ বা $x = b$-তে continuous না হয়, তাহলে গণ্ডগোল হতে পারে। Fig 40 দ্যাখো। তাই আমরা শর্ত দিয়েছি যে পুরো $[a, b]$-র উপরেই continuous হতে হবে।

আচ্ছা বল তো, নীচের দুটো শর্তের মধ্যে কোনটা বেশী শক্তিশালী?

$f(x)$ is continuous on (a, b)

না কি

$f(x)$ is continuous on $[a, b]$?

অবশ্যই দ্বিতীয়টা বেশী শক্তিশালী, কারণ $(a, b) \subset [a, b]$, তাই দ্বিতীয়টা হলে প্রথমটা হবেই, যদিও প্রথমটা হলেও দ্বিতীয়টা নাও হতে পারে। একইভাবে "$f(x)$ is differentiable on (a, b)"-র চেয়ে বেশী শক্তিশালী হল "$f(x)$ is differentiable on $[a, b]$."

যারা না বুঝে Rolle's theorem মুখস্থ করার চেষ্টা করে তারা অনেক সময়ে শর্তগুলো এদিক ওদিক করে ফেলে। সেটা এড়াবার জন্য নীচের অংকটা কর।

Exercise 22: $f(x)$ একটা function আর $a < b$ দুটো যে কোনো সংখ্যা। বলে দিচ্ছি যে $f(a) = f(b)$. নীচে অনেকগুলো শর্ত দেওয়া আছে। এদের মধ্যে কোন কোন শর্তের ক্ষেত্রে Rolle's theorem-এর সিদ্ধান্ত খাটতে বাধ্য? মানে কোন কোন ক্ষেত্রে তুমি জোর দিয়ে বলতে পারো যে, এমন একটা $\xi \in (a, b)$ পাবেই যাতে $f'(\xi) = 0$ হবে? মনে রেখো, একাধিক ক্ষেত্রে "হ্যাঁ" উত্তর হবে!

1. $f(x)$ is continuous on (a, b), differentiable on (a, b).
2. $f(x)$ is continuous on $[a, b]$, differentiable on (a, b).
3. $f(x)$ is continuous on (a, b), differentiable on $[a, b]$.
4. $f(x)$ is continuous on $[a, b]$, differentiable on $[a, b]$.
5. $f(x)$ is differentiable on $[a, b]$.
6. $f(x)$ is differentiable everywhere on $\mathbb{R}$.

■

Exercise 23: Examine the applicability of Rolle's theorem in $[-1, 1]$ for the following functions:

1. $f(x) = |x|$
2. $g(x) = x^3$

■

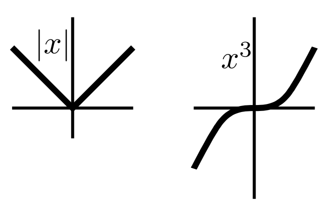
HINT:
Rolle's theorem-এ তিনটে শর্ত আছে। তোমাকে পরীক্ষা করতে বলেছে যে সবগুলোই এই $f(x)$ আর $g(x)$-এর জন্য খাটে কি না। যদি একটাও না খাটে তবে সেটা লিখে দিলেই চলবে। Fig 41 দ্যাখো।

> 1. No, the theorem is not applicable to $f(x) = |x|$ on $[-1, 1]$, because f is not differentiable at $0 \in (-1, 1)$.
> 2. The theorem is not applicable to $g(x) = x^3$ on $[-1, 1]$, because $g(-1) = -1 \neq 1 = g(1)$.

এবার Rolle's theorem-এর প্রমাণ করব। প্রমাণটা সহজ, খালি তিনটে জিনিস মাথায় রাখতে হবে--

1. differentiable হলে continuous হয়।

Fig 41



2. $f(x)$ যদি একটা closed, bounded set $[a,b]$-র উপর continuous হয়, তবে $[a,b]$-র মধ্যে কোনো একটা point-এ $f(x)$ অবশ্যই maximum হবে, এবং কোনো একটা point-এ minimum হবে। এটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম।

3. Fermat's theorem, যেটা আমরা আজকেই শিখেছি।

এবার তবে Rolle's theorem-এর প্রমাণে হাত দেওয়া যাক। নীচের অংকে সেটাই চেয়েছে।

Exercise 24: If f is derivable in the open interval (a,b) and if f is continuous at the end points a, b and $f(a) = f(b)$, show that the equation $f'(x) = 0$ has at least one root in (a,b).[5] ■

HINT:
অংকটা যেভাবে দিয়েছে সেটা পড়ে হঠাৎ Rolle's theorem বলে চিনতে ভুল হতে পারে। কিন্তু আসলে ওই তিনটে শর্তই এখানেও দিয়েছে, ভাষাটা সামান্য এদিক ওদিক করে। $f(a) = f(b)$ তো দিয়েছে দেখতেই পাচ্ছ। আর derivable on open interval (a,b)-ও বলেছে। কিন্তু continuous on $[a,b]$ না বলে খালি দিয়েছে continuous at the end points a and b. এতে আসলে একই কথা বলা হল, কারণ (a,b)-র উপর differentiable বলে (a,b)-ও উপর continuous-ও বটে। আর তার সঙ্গে end point দুটোতে, মানে a আর b-তেও যদি continuous হয়, তবে তো পুরো $[a,b]$-তেই continuous হল!

> $\because f$ is differentiable on (a,b),
> $\therefore f$ is continuous on (a,b).
> Also f is given to be continuous at a, b.
> $\therefore f$ is continuous on the closed, bounded set $[a,b]$.

এইবার আমরা প্রথম খণ্ডের theorem-টা লাগাব--closed, bounded set-এর উপরে continuous function-দের maximum আর minimum থাকে।

> $\because$ any continuous function on a closed, bounded set attains its maximum and minimum,
>
> $$\therefore \exists p, q \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \quad f(p) \le f(x) \le f(q).$$

লক্ষ কর যে maximum আর minimum এরা হয় দুই প্রান্তে (মানে a আর b-তে) থাকবে, নয় তো (a,b)-র মধ্যে থাকবে। ওদের অবস্থানের উপর নির্ভর করে দুটো কেসে ভাঙব। যদি maximum বা minimum-এর মধ্যে অন্ততঃ একজনও (a,b)-র মধ্যে পড়ে তবে সেটা হল প্রথম কেস। Fig 42, Fig 43 আর Fig 44 দ্যাখো।

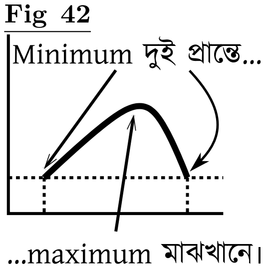
Fig 42


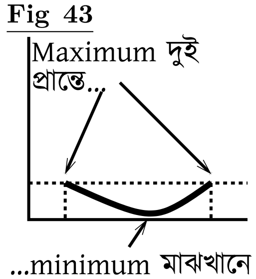
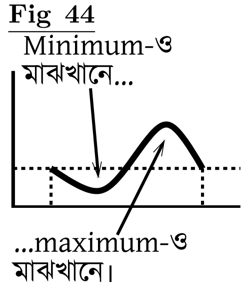
Fig 43


Fig 44


> Case I: $p \in (a,b)$ or $q \in (a,b)$:
>
> If $p \in (a,b)$ then choose $\xi = p$.
> If $q \in (a,b)$ then choose $\xi = q$.
> Then $\xi \in (a,b)$ is an extremum point of f.
> $\therefore f$ is differentiable on (a,b),
> $\therefore$ by Fermat's theorem, $f'(\xi) = 0$, as required.

পড়ে থাকে তাহলে একটাই কেস, যেখানে maximum আর minimum দুজনেই দু'প্রান্তে। যেহেতু $f(a) = f(b)$ তার মানে এ ক্ষেত্রে maximum আর minimum আসলে সমান, মানে function-টা আসলে $[a,b]$-র উপরে constant. একটা ক্লাসের ফার্স্ট বয় আর লাস্ট বয় দুজনেই যদি পরীক্ষায় 50 নম্বর পেয়ে থাকে তবে বুঝতে হবে ক্লাসের সব ছাত্রই 50 পেয়েছে!

> Case II: $p, q \in \{a, b\}$:
>
> Then f must be a constant function. So if we take $\xi = \frac{a+b}{2}$ then $f'(\xi) = 0$, as required.

Exercise 25: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a function such that (i) f is continuous on $[a,b]$, (ii) f is derivable in (a,b), and (iii) $f(a) = f(b)$. Prove that there exists $c \in (a,b)$ such that $f'(c) = 0$.[3] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

Exercise 26: Let f be derivable in the open interval (a,b) and be continuous at the two end points a and b. Let $f(a) = f(b) = 0$. Show that the equation $f'(x) = 0$ has at least one root in (a,b).[4] ■

HINT:
আগের অংকটাই, খালি এখানে $f(a) = f(b)$ দিলেই চলত, ওরা দুজনেই যে $= 0$ তার কোনো দরকার নেই।

4.1.1 Applications

এবার আমরা কিছু অংক দেখব যেগুলো Rolle's theorem লাগিয়ে করা যায়। মনে কর তোমাকে বলা হল কোনো পরীক্ষার প্রশ্ন বানাতে হবে Rolle's theorem ব্যবহার করে। কি করে করবে? একটা কায়দা হতে পারে এইরকম-- প্রথমে একটা কিছু খটমট differentiable function নাও $f(x)$, যেমন

$$f(x) = \sin(x^2) \log x.$$

এবার দুটো সংখ্যা a, b বার কর যাতে $f(a) = f(b)$ হয়। আমরা জানি যে, $\sin \pi = \sin 2\pi = 0$. তাই আমরা $a = \sqrt{\pi}$ আর $b = \sqrt{2\pi}$ নিতে পারি। সুতরাং Rolle's theorem থেকে জানি যে $f'(x)$ এই দুটো সংখ্যার মাঝখানে কোথাও না কোথাও অন্ততঃ একবার শূন্য হবে। এখানে

$$f'(x) = 2x \cos(x^2) \log x + \frac{\sin(x^2)}{x}.$$

সুতরাং তুমি অংকটা দিতে পারো এইভাবে--

Show that there is at least one number x between $\sqrt{\pi}$ and $\sqrt{2\pi}$ such that

$$2x\cos(x^2)\log x + \frac{\sin(x^2)}{x} = 0. \qquad (*)$$

লক্ষ কর অংকটার মধ্যে কিন্তু কোথাও Rolle's theorem-এর উল্লেখমাত্র নেই। তুমি $f(x)$-টাও ফাঁস করে দাও নি, খালি $f'(x)$-টা দিয়েছ। তাই যদিও $f(x)$-টা খুব কঠিন কিছু ছিল না, অংকটা কিন্তু বেশ কঠিন দেখতে হয়েছে!
তবে তুমি যদি কোনোদিন পরীক্ষার প্রশ্ন বানাও তবে যেন এরকম বিদঘুটে অংক বেশী দিও না। এরকম অংক বানাতে মজা লাগতে পারে, কিন্তু সমাধান করার জন্য আন্দাজে হাতড়ানো ছাড়া বিশেষ কোনো পথ নেই, তাই এতে ছাত্রদের মুখস্থ বিদ্যার পরীক্ষা হতে পারে, কিন্তু সত্যিই অংক শিখেছে কিনা তার পরীক্ষা হবে না।
যাই হোক এরকম কয়েকটা অংক কষা যাক--

Exercise 27: If $p(x)$ is a polynomial of degree > 1, prove that there is a root of $p'(x) - kp(x) = 0$, k being a real constant, between any two distinct roots of $p(x) = 0$.[3] ■

HINT:
এই অংকটায় আসলে $p(x)$-এর কোনো polynomial হবার দরকার নেই, যা খুশি একটা differentiable function হলেই চলত, খালি অন্ততঃ দুটো distinct root থাকলেই চলবে। আমাদের এমন একটা $f(x)$ বার করতে হবে যাতে $f'(x) = 0$ হওয়া মানেই $p'(x) - kp(x) = 0$ হয়। খানিকক্ষণ এদিক ওদিক ঢুঁ মেরে বুঝতে হবে $f(x)$ কি নিলে কাজ হবে--

> Let $f(x) = e^{-kx}p(x)$.
> Then $f'(x) = e^{-kx}(p'(x) - kp(x))$.

এই বার Rolle's theorem লাগিয়ে দিলেই চলবে।

> Let $a < b$ be any two roots of $p(x)$.
> Then $f(a) = f(b) = 0$.
> Also f is differentiable on (a, b) and continuous on $[a, b]$. So by Rolle's theorem
> $$\exists \xi \in (a, b) \quad f'(\xi) = 0.$$
> $\therefore e^{-k\xi}(p'(\xi) - kp(\xi)) = 0$.
> $\therefore p'(\xi) - kp(\xi) = 0$, as required.

আরও একটা একই রকম অংক।

Exercise 28: Prove that between any two real roots of $e^x \sin x = 1$ there exists at least one real root of $e^x \cos x + 1 = 0$.[3] ■

HINT:

> Let $g(x) = e^x \sin x - 1$.
> Let $f(x) = e^{-x}g(x) = \sin x - e^{-x}$.
> Let $a < b$ be any two roots of $g(x)$.
> Then $f(a) = f(b) = 0$.
> Also f is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b).

So, by Rolle's theorem,

$$\exists \xi \in (a,b) \quad f'(\xi) = 0.$$

Now $f'(x) = \cos x + e^{-x} = e^{-x}(e^x \cos x + 1)$.
So $f'(\xi) = 0 \implies e^{\xi} \cos \xi + 1 = 0$.

নীচের অংকটা একেবারেই একইরকম। নিজে নিজে করে হাত পাকিয়ে নাও।

Exercise 29: Prove that between any two real roots of the equation

$$e^x \cos x + 1 = 0$$

there is at least one real root of the equation

$$e^x \sin x + 1 = 0.$$

[3] ■

Exercise 30: Prove that between any two distinct roots of $e^x p(x) = c$ there is at least one root of $e^x p'(x) + c$. Here $p(x)$ is any differentiable function, and c is a real constant. ■

Exercise 31: If $p(x)$ is a polynomial with at least n distinct real roots, then show that $p'(x)$ has at least $n-1$ distinct real roots. ■

HINT:
$p(x)$-এর যে কোনো দুটো root-এর মাঝে $p'(x)$-এর অন্তত একটা root থাকবে।

Exercise 32: Let $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable functions such that $f'(x), g'(x)$ are both always nonzero. Let $f(1) = 0$ and $g(2) = 0$. Show that there must be a number $\xi \in (1,2)$ such that

$$\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} + \frac{g(\xi)}{g'(\xi)} = 0.$$

■

Fig 45

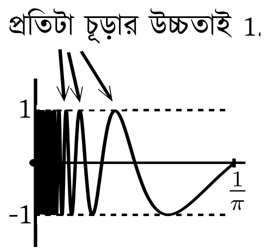
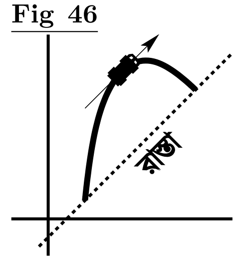


Fig 46



Exercise 33: Let $\phi : \left[0, \frac{1}{\pi}\right] \to \mathbb{R}$ be defined by

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{if } 0 < x \le \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Is Rolle's theorem applicable to ϕ on $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$? Justify your answer.[2] ■

HINT:
এখানে আমাদের কাজ হল Rolle's theorem-এর যে তিনটে শর্ত আছে সেগুলো একে একে পরীক্ষা করে দেখা যে ϕ-এর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য কিনা। একটাও যদি শর্ত পাওয়া যায় যেটা ϕ-এর বেলায় খাটে না, তবে খালি সেটুকু লিখে দিলেই হবে। যদি সবগুলোই খাটে তবে সবগুলোই প্রমাণ করে দেখাতে হবে। এখানে একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে ϕ-টা $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$-এর উপরে continuous নয়, 0-তে সমস্যা আছে, কারণ 0-র যত কাছে আসবে $\sin\frac{1}{x}$ ততই লাফালাফি জুড়ে দেবে। Fig 45 দেখলেই ব্যাপারটা বুঝবে। যত $x = 0$-র কাছে এগোচ্ছি, লাফালাফি এত ঘনঘন হচ্ছে যে গ্রাফটা পুরো কালো হয়ে গেছে।
আমাদের কাজ হল এই continuity-র অভাবের কথাটা যথাসম্ভব সংক্ষেপে লিখে প্রমাণ করে দেওয়া।

> No, Rolle's theorem is not applicable to ϕ on $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$, because $\phi(x)$ is not continous at $x = 0$.

প্রমাণ করার জন্য আমরা কিন্তু $\sin\frac{1}{x}$-এর লাফালাফির পুরো গল্পটা প্রমাণ করতে বসব না। খালি এমন একটা sequence দেখিয়ে দেব $\{x_n\}_n \subseteq \left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ যাতে $x_n \to 0$ হয় অথচ $\phi(x_n) \not\to \phi(0) = 0$ হয়। লাফালাফির সময়ে সর্বোচ্চ বিন্দুগুলো যেখানে যেখানে আসছে তাদের নিলেই কাজ চলবে। সর্বোচ্চ বিন্দু মানে যেখানে $\sin\frac{1}{x} = 1$ হচ্ছে, অর্থাৎ $\frac{1}{x} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$, বা $x = \frac{2}{(4n+1)\pi}$-তে। সুতরাং--

> ⟦ Because:
> Let $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.
> Then $\{x_n\}_n \subseteq \left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ and $x_n \to 0$.
> But $\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi(x_n) = 1$.
> $\therefore \phi(x_n) \not\to \phi(0) = 0$.
> So, by sequential criterion of continuity, ϕ cannot be continuous at 0.
> ⟧

DAY 5
Mean value theorems

এবার আমরা Rolle's theorem-কে সামান্য এদিক ওদিক করে আরও দুটো গুরুত্বপূর্ণ theorem বানাব। এর মধ্যে প্রথমটার গুরুত্ব অপরিসীম, নাম Lagrange's mean value theorem. দ্বিতীয়টা এটারই একটু জটিল সংস্করণ-- Cauchy's mean value theorem.

5.1 Lagrange's mean value theorem

দুটো theorem-ই আমাদের গাড়ীর উপমা দিয়ে বুঝতে খুবই সহজ। আমরা Rolle's theorem-এর সময়ে রাস্তাটাকে নিয়েছিলাম x-axis-এর সাথে সমান্তরাল করে। বলাই বাহুল্য যে যদি রাস্তাটা x-axis-এর সাপেক্ষে হেলেও থাকত তাতেও কিছুই বদলাত না, গাড়ীটাকে তাও ফেরার জন্য কোনো না কোনো মুহূর্তে রাস্তার সমান্তরাল হতেই হত (Fig 46).

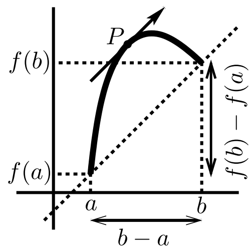


Fig 47

এবার অংকের ভাষায় লিখি। Fig 47 দ্যাখো। যেহেতু এবার আর রাস্তাটা x-axis-এর সমান্তরাল নয়, তাই এখন আর Rolle's theorem-এর মত $f(a) = f(b)$ ধরা যাবে না। যখন গাড়ীটা আছে ধর কোনো একটা বিন্দু P-তে, তখন ওর অভিমুখ হল $f'(x)$ বরাবর। কোনো এক সময়ে এই অভিমুখ রাস্তার অভিমুখের সমান হবে। রাস্তার অভিমুখ (মানে রাস্তার slope) হল

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

তার মানে আমরা দাবী করছি যে, এমন একটা ξ পাব যাতে

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

এইটাই হল Lagrange's mean value theorem. যেহেতু এটা আসলে Rolle's theorem-এরই রূপভেদ, তাই $f(x)$-এর উপর continuity, differentiability-র শর্তগুলো একেবারেই একই থাকবে।

Lagrange's mean value theorem

Let $f(x)$ be a function that is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b). Then

$$\exists \xi \in (a, b) \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proof: এই প্রমাণের কায়দাটা হল অংকটাকে Rolle's theorem-এ পরিণত করা, মানে এমন একটা function $g(x)$ নেব যার জন্য $g(a) = g(b)$ হবে, আর $g'(x) = 0$ হওয়া মানে হবে

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

এরকম একটা $g(x)$ হল--

Let

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

এটা কি করে পেলাম? একটা পদ্ধতি হল ছবি দেখে বার করা। Fig 48 দ্যাখো। এখানে রাস্তার equation হল

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

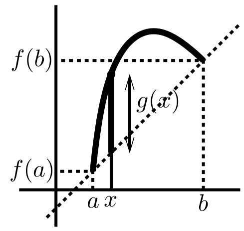


Fig 48

আর গাড়ীর পথের equation-টা তো $y = f(x)$ আছেই। তাহলে গাড়ীটা রাস্তা থেকে কতটা উপরে আছে? উত্তর হল

$$f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right].$$

ঠিক এটাই আমরা $g(x)$ হিসেবে নিয়েছি।
এবার খালি $g(x)$-এর উপর Rolle's theorem লাগানোর অপেক্ষা। প্রথমে দেখা দরকার $g(x)$ সত্যিই উপযুক্ত কি না--

> Then
> (i) $g(x)$ is continuous on $[a, b]$,
> (ii) $g(x)$ is differentiable on (a, b),
> (iii) $g(a) = 0$ and $g(b) = 0$.

হ্যাঁ, সত্যিই তবে $g(x)$-এর উপর Rolle's theorem লাগাতে পারি--

> $\therefore$ By Rolle's theorem,
> $$\exists \xi \in (a, b) \quad g'(\xi) = 0.$$
> Now
> $$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
> So $g'(\xi) = 0$ gives
> $$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
> as required.

[Q.E.D]

নীচের অংকটা একটা ছোট্টো ধাঁধা।

Exercise 34: একটা রাস্তায় ঘন্টায় 60 কিলোমিটারের চেয়ে বেশী জোরে গাড়ী চালানো বেআইনি। প্রতি আধ কিলোমিটার অন্তর একটা করে পুলিস চেকপোস্ট আছে, কোনো গাড়ী তার সামনে দিয়ে গেলেই যন্ত্র দিয়ে তার সেই মুহূর্তের গতিবেগ মাপা হয়ে যায়। একটা গাড়ী চারটের সময়ে প্রথম চেকপোস্টের সামনে দিয়ে যখন গেল তখন তার গতিবেগ দেখা গেল ঘন্টায় 50 কিলোমিটার। ঠিক কুড়ি সেকণ্ড পরে দ্বিতীয় চেকপোস্টের যন্ত্রে দেখা গেল যে গাড়ীটা ঘন্টায় 40 কিলোমিটার বেগে যাচ্ছে। অমনি বেআইনিভাবে গাড়ী চালানোর অপরাধে পুলিস গাড়ীটাকে জরিমানা করে দিল। কিন্তু গাড়ীটার গতিবেগ তো দুই চেকপোস্টেই ঘন্টায় 60 কিলোমিটারের চেয়ে কম ছিল। তবে শাস্তি হল কেন? ■

5.2 আরেকভাবে লেখা

আমরা Lagrange's mean value theorem-টা একভাবে লিখেছি। এটাকে আরেকভাবেও লেখা যায়। তাতে মানে কিছুই বদলায় না, খালি notation-টা একটু অন্যরকম হয়।
আমরা যেভাবে theorem-টা লিখেছি, তাতে একটা $\xi \in (a,b)$ আছে। লক্ষ কর যে, a এবং b-এর মাঝামাঝি যে কোনো সংখ্যাকেই তুমি $(1-\theta)a+\theta b$ আকারে লিখতে পারো, যেখানে $\theta \in (0,1)$. তাই আমরা theorem-টাকে এভাবেও লিখতে পারি--

Let $f(x)$ be a function that is continuous on $[a,b]$ and differentiable on (a,b). Then

$$\exists \theta \in (0,1) \quad f'((1-\theta)a+\theta b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

বলাই বাহুল্য যে আমরা যেভাবে লিখেছিলাম সেটাই দেখতে বেশী সুন্দর ছিল।

5.3 Cauchy's mean value theorem

Rolle's theorem-এর গাড়ীটা যে রাস্তা দিয়ে যাচ্ছিল সেটা ছিল x-axis-এর সঙ্গে সমান্তরাল। যেই রাস্তাটা একটু হেলিয়ে দিলাম, তখন পেলাম Lagrange's mean value theorem. দুই ক্ষেত্রেই ধরে নিয়েছিলাম যে রাস্তা ছাড়ার পর গাড়ীটার পথ কোনো function $f(x)$-এর গ্রাফ হবে। কিন্তু যদি তা না হয়? যেমন যদি গাড়ীটা Fig 49-এর মত করে এঁকেবেঁকে পাক খেয়ে চলে? আমাদের মূল যুক্তি তখনও ঠিক থাকতে বাধ্য, কারণ রাস্তায় ফেরার জন্য কোনো না কোনো সময়ে তো গাড়ীটাকে রাস্তার সমান্তরাল হতেই হবে! কিন্তু ওই প্যাঁচ-মারা পাক-খাওয়া পথটা তো আর কোনো function-এর গ্রাফ হতে পারে না! (কেন? Fig 50 দেখলেই বুঝবে!)
এক্ষেত্রে আমরা একটু অন্যভাবে এগোব--ধর t সময়ে গাড়ীটার অবস্থান হল (x,y), যেখানে $x=f(t)$ আর $y=g(t)$. ধরো গাড়ীটা রাস্তা ছেড়েছিল $t=a$ সময়ে, আর ফিরে এসেছে $t=b$-তে। তার মানে এই দুই মুহূর্তেই গাড়ীটা রাস্তার উপরে ছিল, মানে রাস্তাটা এমন একটা সরলরেখা যার উপর $(f(a),g(a))$ এবং $(f(b),g(b))$ এই বিন্দুদুটো আছে (Fig 51). সুতরাং তার slope হবে

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}.$$

আবার তুমি আপত্তি তুলতে পারো যে, $f(b)=f(a)$ হলে তো $f(b)-f(a)$ দিয়ে ভাগ করা যাবে না! ঠিক কথা। কিন্তু যদি আপাততঃ ধরে নিই যে $f(b)-f(a)\neq 0$,
এবার লক্ষ কর যে কোনো সময় t-তে গাড়ীটার মুখ হবে যথারীতি $\frac{dy}{dx}$ বরাবর। এখন

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

তুমি আপত্তি তুলতেই পারো যে $f'(t)$ দিয়ে ভাগ করার আগে তো জানা দরকার $f'(t)=0$ হতে পারে কিনা। ঠিক কথা, সেই প্রসঙ্গে এক্ষুণি আসছি। আপাততঃ ধরে নাও যে $f'(t)\neq 0$. তবে বলতে পারি যে এমন কোনো t থাকতে বাধ্য যখন

Fig 49

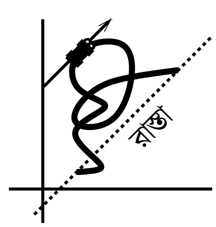


Fig 50

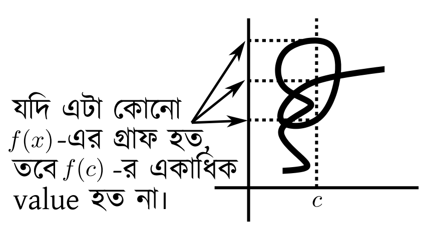
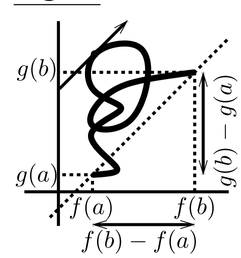


Fig 51



গাড়ীর অভিমুখ রাস্তার সমান্তরাল হবে, মানে

$$\frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$$

হবে। দুদিকেরই denominator দুটো শূন্য হয়ে যাওয়া নিয়ে আমাদের একটু ভয় ছিল। তাই এইভাবে লিখি--

$$g'(t)(f(b) - f(a)) = f'(t)(g(b) - g(a)).$$

যদি $f'(t)$ বা $f(b) - f(a)$ এখন শূন্য হয়েও যায়, তাতেও কোনো চিন্তা নেই, সেক্ষেত্রে দুইদিকই শূন্য হবে। এইটাই হল Cauchy's mean value theorem.

Exercise 35: State and prove Cauchy's mean value theorem for differential calculus. [1+4] ■

HINT:

> **Cauchy's mean value theorem**
>
> If $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ are continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b) then $\exists \xi \in (a, b)$ such that
>
> $$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$
>
> <u>Proof:</u>

প্রমাণটা ছোটো, ঠিক Lagrange's MVT-র মতই। প্রথমে একটা যুৎসই function তৈরী করে তার উপর Rolle's theorem লাগালেই হবে। এই যুৎসই function-টা কি হবে সেটা মনে রাখাই যা একটু শক্ত। এটা হল--

> Define
>
> $$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Lagrange's MVT-র প্রমাণেও প্রথমে একটা বিদ্‌ঘুটে function $g(x)$ নিয়ে শুরু করেছিলাম। সেখানে $g(x)$-টাকে ছবি দিয়ে বোঝা যাচ্ছিল--গাড়ীটা রাস্তা থেকে কতটা উপরে। এখানে কিন্তু $h(x)$-এর সেরকম কোনো জ্যামিতিক ব্যাখ্যা পাওয়া কঠিন।

এবার খালি $h(x)$-এর উপরে Rolle's theorem লাগানোর অপেক্ষা। প্রথমে দেখে নিই যে $h(x)$ সত্যিই Rolle's theorem-এর তিনটে শর্ত পালন করে--

> Then $h(x)$ is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b). Also
>
> $$h(a) = (f(a) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(a) - g(a))(f(b) - f(a)) = 0$$
>
> and
>
> $$h(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) = 0.$$
>
> Thus $h(a) = h(b)$.

> Hence, by Rolle's theorem, $\exists \xi \in (a,b)$ such that $h'(\xi) = 0$.

এবার $h'(x)$ বার করে তাতে $x = \xi$ বসাব। আমরা তো $h(x)$-এর ফর্মুলা জানিই, সেটাকে differentiate করে দিলেই পাব--

> Now,
> $$\because h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)),$$
> Putting $x = \xi$,
> $$\therefore f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)),$$
> as required.

Exercise 36: If f and g are each continuous on the closed interval $[a,b]$ and differentiable on (a,b) then prove that there exists a point x_0 in the open interval (a,b) such that $f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$.[4] ■

HINT:
একই অংক।

Exercise 37: State and prove Cauchy's mean value theorem and deduce from it Lagrange's mean value theorem.[1+3+1] ■

HINT:
প্রথম দুটো অংশ তো আগেই করেছি। তৃতীয় অংশে বলেছে Cauchy's MVT ব্যবহার করে Lagrange's MVT প্রমাণ করতে। সে কাজটা খুবই সহজ, কারণ Lagrange's MVT হল আসলে Cauchy's MVT-র একটা special case. যদি Cauchy's MVT-তে $g(x) = x$ নিই অমনি Lagrange's MVT পাব।

> <u>Lagrange's MVT from Cauchy's MVT:</u>
>
> Let $g(x) = x$.
>
> Then from Cauchy's MVT
> $$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)),$$
> or
> $$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a),$$
> which is Lagrange's MVT.

Lagrange's MVT-র চেয়ে যে Cauchy's MVT বেশী শক্তিশালী, সেটা নীচের অংকটা করলেই বুঝবে।

Exercise 38: যদি $f(x) = x^{2/3}$ আর $[a,b] = [-1,1]$ নিই, তবে কি তুমি Lagrange's MVT লাগাতে পারো? শর্তগুলো পর পর পরীক্ষা করে দ্যাখো। এবার Cauchy's MVT লাগাব। তার জন্য $f(t) = t^3$ আর $g(t) = t^2$ নেব। (লক্ষ কর $x = f(t)$ আর $y = g(t)$ ধরলে এখানেও $y = x^{2/3}$ হয়)। এখানেও $[a,b] = [-1,1]$ নেব। পরীক্ষা করে দ্যাখো Cauchy's MVT লাগানো যায় কি না। ■

DAY 6
Applications of MVT (part 1)

6.1 Lagrange: 1

Lagrange's MVT খুব কাজের জিনিস। এটা দিয়ে এতরকম জিনিস দেখানো যায় যে বলে শেষ করা কঠিন। আমরা এখানে চাররকমের প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করব। প্রথম ভাগে আছে কিছু অংক যেখানে অংকটার মধ্যে differentiation-এর চিহ্নমাত্র নেই, অংকটা দেখে সন্দেহ করাই কঠিন যে এখানে mean value theorem কাজে লাগতে পারে।

Exercise 39: Show that

$$0 < \log_e\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) < x.$$

[3] ■

HINT:

দ্যাখো, অংকটায় কোনো differentiation-এর উল্লেখ পর্যন্ত নেই! এখানে অবশ্য অংকটা ঠিক সম্পূর্ণভাবে দেওয়া নেই--বোঝাই যাচ্ছে যে $x \leq 0$ হলে এটা হতে পারে না, কারণ মাঝখানের ওই বিদ্ঘুটে log-ওয়ালা জিনিসটা যদি বাদও দাও, তাও পড়ে থাকে $0 < x$. তার মানে অংকটায় বলে দেওয়া উচিত ছিল যে $x > 0$. আমরা সেটা ধরে নেব।

> We need to assume $x > 0$.

এবার যেটা করব সেটা একটা কৌশল, না জানা থাকলে ভেবে বার করা কঠিন। তবে এই কৌশলটা প্রায়ই কাজে লাগে, তাই শিখে রাখা ভালো।

> আমরা $\frac{e^x-1}{x}$-কে $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ আকারে লিখব।

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে এখানে $f(x) = e^x$ আর $a = 0$ নিলেই কাজ হবে।

> By Lagrange's mean value theorem,
>
> $$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^\xi$$
>
> for some $\xi \in (0, x)$, because $f(x) = e^x$ is differentiable everywhere.

সংক্ষেপে লিখে দিলাম কেন Lagrange's mean value theorem-টা এখানে প্রযোজ্য। লক্ষ কর যে, এখানে differentiable on $(0, x)$ and continuous on $[0, x]$ ইত্যাদি ধানাইপানাই করলাম না, কারণ এখানে $f(x)$ সর্বত্রই differentiable, অতএব ওই সব সূক্ষ্মসূক্ষ্ম শর্তগুলো সবই পালিত হতে বাধ্য।
এর পরের কাজ সংক্ষিপ্ত।

> $$\therefore \log_e\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \log_e(e^\xi) = \xi \in (0, x),$$
>
> ie,
>
> $$0 < \log_e\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) < x,$$

as required.

একই কায়দায় নীচের অংকটা চেষ্টা কর।

Exercise 40: Show that for $x > 0$

$$\sin x < x \text{ and } \cos x < 1 + x.$$

■

6.2 Lagrange: 2

একটা function-এর গুণাগুণ জানা থাকলে তার derivative-এর গুণাগুণ বার করা যায়। অনেক সময়ে এর উল্টো কাজটাও করতে হয়। যেমন ধর আমরা জানি যে একটা function $f(x)$ যদি constant হয়, তবে $f'(x) \equiv 0$ হবে। এর উল্টোটাও কি ঠিক, মানে যদি $f'(x) \equiv 0$ হয় তবে $f(x)$ একটা constant হতে বাধ্য? উত্তর হল--হ্যাঁ। এই ধরণের প্রশ্নের উত্তর দিতে প্রায়শঃই mean value theorem-এর ডাক পড়ে, যেমন নীচের অংকটায়।

Exercise 41: Let $f(x)$ be a function such that

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0.$$

Show that $f(x)$ must be constant on (a, b). ■

HINT:

Let, if possible, $f(x)$ be not constant on (a, b).
Then $\exists p, q \in (a, b) \quad f(p) \neq f(q)$.
So $p \neq q$. Let, without loss of generality, $p < q$.
Then $f(x)$ is continuous on $[p, q]$ and differentiable on (p, q).
So by Lagrange's MVT,

$$\exists \xi \in (p, q) \quad f'(\xi) = \frac{f(p) - f(q)}{p - q}.$$

Since $f(p) \neq f(q)$ so $f'(\xi) \neq 0 (\Rightarrow\Leftarrow)$.

একইভাবে নীচের অংকদুটো কর।

Exercise 42: Let $f(x)$ be a function such that

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \geq 0.$$

Show that $f(x)$ must be non-decreasing on (a, b). ■

Exercise 43: Let $f(x)$ be a function such that

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0.$$

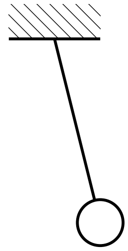


Fig 52

Is it true that $f(x)$ must be *strictly* increasing on (a,b)? ■

Exercise 44: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ and $a<c<b$. If $f'(c)>0$, then prove that f is increasing at c.[3] ■

HINT:
এই অংকটা মোটেই কঠিন কিছু নয়, কিন্তু একটা কথার মানে বুঝে নেওয়া দরকার--"increasing at c" মানে কি? Fig 52-তে একটা পেণ্ডুলামের ছবি রয়েছে। পেণ্ডুলামটা এদিক ওদিক দুলছিল, তারই ফাঁকে কোনো এক মুহূর্তে এই ছবিটা তোলা হয়েছে। কেবলমাত্র এই ছবির ভিত্তিতে বলতে পারো, এই মুহূর্তে পেণ্ডুলামটা উঠছে নাকি নামছে? একটু ভাবলেই বুঝবে খালি এক মুহূর্তের একটা স্থিরচিত্র দেখে পেণ্ডুলামটার অবস্থান মাত্র জানা যায়, গতির অভিমুখ বোঝা যায় না। যদি একটা ভিডিও দেওয়া থাকত, তা সে যত অল্পসময়ের জন্যই হোক না কেন, তা থেকে তৎক্ষণাৎ গতির অভিমুখ বলে দিতে পারতাম। এখানেও ব্যাপারটা কতকটা সেইরকম। যদি তোমাকে খালি $x=c$-তে $f(x)$-এর value বলে দিই, তবে কেবলমাত্র তা থেকে তুমি বলতে পারবে না f-টা $x=c$-তে increasing নাকি decreasing. তার জন্য c-কে ঘিরে একটা neighbourhood-এর উপর $f(x)$ নিয়ে কাজ করতে হবে।

Shall show f is increasing at c, *i.e.*,

Target $\exists\delta>0\quad\forall x\in N(c,\delta)\cap[a,b]\quad\big[x\lesseqqgtr c\implies f(x)\lesseqqgtr f(c)\big].$

দেখলে, এখানে neighbourhood-এর প্রসঙ্গটা কি করে নিয়ে এলাম? এইটা ভালো করে বুঝে নাও।

$\because f'(c)>0,\ \therefore \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\ell$ for some $\ell>0$.

In particular,

$$\exists\delta>0\quad\forall x\in N'(c,\delta)\cap[a,b]\quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this $\delta>0$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x\in N(c,\delta)\cap[a,b]$.

If $x=c$ then clearly $f(x)=f(c)$.

If $x\neq c$, then $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$, and so $x\lesseqqgtr c\implies f(x)\lesseqqgtr f(c)$ as required.

এই অংকে "$f(x)$ is increasing at $x = c$" এই কথাটাকে বিশদ করে লিখেছিলাম এইভাবে--

> c-এর এমন একটা neighbourhood আছে $N(c, \delta)$, যার মধ্যে যাই x নাও না কেন $x > c$ হলে $f(x) > f(c)$ হবে, আর $x < c$ হলে $f(x) < f(c)$.

অনেক সময়ে এই লেখাটায় একটা ভুল হয়ে যায়। সেটা হল এইরকম--

> c-এর এমন একটা neighbourhood আছে $N(c, \delta)$ যার মধ্যে যাই x, y নাও না কেন $x > y$হলে $f(x) > f(y)$ হবে।

"$f(x)$ is increasing at $x = c$"-এর সঠিক ব্যাখা কিন্তু এটা হয় নি। গলদটা কোথায় সেটা নিয়েই চিন্তা করতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Exercise 45: এমন একটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দাও যাতে $f'(1) > 0$ হয় অথচ 1-এর এমন একটাও neighbourhood নেই যার উপরে f-টা increasing! অংকটায় মাথা খাটাতে হবে বেশ কিছুটা, যদিও এরকম function আমরা ইতিমধ্যেই এই বইতে অন্য প্রসঙ্গে আলোচনা করেছি। ■

এবার যে অংকটা করতে যাচ্ছি তার যুক্তিটা বহু কাজে লাগে।

Exercise 46: If $f''(x) \geq 0$ on $[a, b]$, prove that

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

for any two points x_1, x_2 in $[a, b]$.[2] ■

HINT:

> Let, if possible,
>
> $$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 < x_2, \quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$
>
> Let $z = \frac{x_1+x_2}{2}$.
> Then
>
> $$2f(z) > f(x_1) + f(x_2),$$
>
> or
>
> $$f(z) - f(x_1) > f(x_2) - f(z),$$
>
> or
>
> $$\frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} > \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}.$$
>
> $\therefore$ By Lagrange's mean value theorem,
>
> $$f'(\xi) > f'(\theta)$$
>
> for some $\xi \in (x_1, z)$ and $\theta \in (z, x_2)$.
> $\because \xi < \theta \quad \therefore \frac{f'(\theta)-f'(\xi)}{\theta-\xi} < 0.$

∴ By Lagrange's mean value theorem,

$$f''(\lambda) < 0,$$

for some $\lambda \in (\xi, \theta) \subseteq [a, b]$.(⇒⇐)

একই কায়দায় নীচের theorem-টা প্রমাণ কর। আগে লক্ষ কর যে theorem-টায় $\alpha = \frac{1}{2}$ বসালেই সেটা আগের অংকটাতে পরিণত হয়।

Exercise 47: প্রমাণ কর--

THEOREM

If $f(x)$ is a function such that $f''(x) \geq 0$ on (a, b) then $\forall x, y \in (a, b)$ $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

■

Exercise 48: Let $\phi(x) = f(x) + f(1-x)$ and $f''(x) > 0$ in $[0, 1]$. Show that ϕ is monotonic decreasing in $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ and monotonic increasing in $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.[3] ■

HINT:

We have

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(1-x) = f''(\xi)(x - (1-x)) = f''(\xi)(2x-1)$$

for some ξ between x and $1-x$, by Lagrange's mean value theorem.

Thus

$$\phi'(x) \lesseqqgtr 0 \text{ according as } x \lesseqqgtr \tfrac{1}{2}.$$

So ϕ is monotonic decreasing in $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ and monotonic increasing in $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, as required.

6.3 Lagrange: 3

অনেক সময়ে $|f(x) - f(y)|$ আর $|x - y|$-এর মধ্যে কিছু সম্পর্ক থাকে, তা থেকে $f(x)$ বা $f'(x)$-এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য জানা যায়। এই কাজে Lagrange's MVT যে কাজে দেয় সেটা বোঝা কঠিন নয়, কারণ $|f(x) - f(y)|$-কে $|x - y|$ দিয়ে ভাগ করলে হয়

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|},$$

এবং Lagrange's MVT বলে যে এটা $|f'(\xi)|$-এর সমান, যেখানে ξ হল x আর y-এর মাঝামাঝি একটা সংখ্যা। নীচের অংকগুলো সবই এই ধারণার উপর ভিত্তি করে তৈরী। প্রথম অংকটা অবশ্য এতই সহজ যে Lagrange's MVT-র উল্লেখ ছাড়াই হয়।

Exercise 49: If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $|f(x) - f(y)| \le |x - y|^2$ for all $x, y \in \mathbb{R}$, prove that f is a constant function.[3] ■

HINT:

Shall show that

Target $\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad f'(a)$ exists and $= 0$.

আমাদের দেখাতে বলেছে যে $f(x)$ একটা constant function. আমরা জানি যে তার জন্য এটা দেখালেই হবে যে $f'(x) \equiv 0$. এই কথাটা আসলে Lagrange's MVT থেকে আসে।

$\boxed{\forall a}$ Take any $a \in \mathbb{R}$.

Then, by the given condition,

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad |f(a+h) - f(a)| \le |h|^2.$$

এখানে আমরা $x = a + h$ আর $y = a$ নিয়ে $|f(x) - f(y)| \le |x - y|^2$ ব্যবহার করেছি।

$$\therefore \forall h \ne 0 \quad \frac{|f(a+h) - f(a)|}{|h|} \le |h|,$$

i.e.,

$$\forall h \ne 0 \quad 0 \le |[|\frac{f(a+h) - f(a)}{h}|]| \le |h|.$$

So by the sandwich law of limit,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ exists and } = 0.$$

এখানে sandwich law কি করে লাগালাম বুঝলে? যখন $h \to 0$ হবে, তখন $|h| \to 0$-ও হবে। সুতরাং $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-টা (যেটা 0 আর $|h|$-এর মধ্যে আটকে আছে) সেটাও বাধ্য হয়েই 0-তে যাবে।

Hence $f'(a) = 0$.

$\therefore f'(x) \equiv 0$ on (a, b).

এবার উপসংহার--

$\therefore$ By Lagrange's MVT, $f(x)$ is constant on (a, b).

নীচের অংকটাও একেবারেই একইরকম, নিজে নিজে করার জন্য দিলাম।

Exercise 50: If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $|f(x) - f(y)| \le |x - y|^3$ for all $x, y \in \mathbb{R}$, prove that f is a constant function. ■

আমরা এক্ষুণি বললাম যে অনেক সময়েই $|f(x) - f(y)|$ আর $|x - y|$-এর মধ্যে সম্পর্ক থাকে। এরকম একটা গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক হল Lipschitz condition.

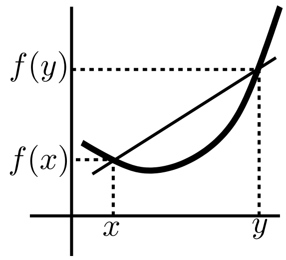


Fig 53

> DEFINITION: **Lipschitz condition**
>
> Let $f : D \to \mathbb{R}$ (where $D \subseteq \mathbb{R}$) be any function. We say that $f(x)$ satisfies the Lipschitz condition if
> $$\exists K > 0 \quad \forall x, y \in D \quad |f(x) - f(y)| \le K|x - y|.$$
> K is called a Lipschitz constant of $f(x)$.

ছবি দিয়ে ভাবলে ব্যাপারটা এইরকম। ধরো $f(x)$-এর গ্রাফের উপর তুমি যে কোনো দুটো বিন্দু নিলে (Fig 53)। তাদের যোগ করলে যে লাইনটা পাবে তাকে বলে গ্রাফটার একটা chord (কর্ড)। লক্ষ কর এর slope হল

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

যদি $f(x)$ function-টা Lipschitz condition-কে satisfy করে তবে এই slope-টা $-K$ থেকে K-র মধ্যে থাকতে বাধ্য। তার মানে কোনো function-এর পক্ষে Lipschitz condition-কে satisfy করা মানে হল তার কোনো chord-ই খুব বেশী খাড়া হতে পারবে না। ঠিক কতটা পর্যন্ত খাড়া হতে পারবে সেটা ঠিক করে দিচ্ছে ওই Lipschitz constant K. খালি এই বর্ণনাটুকুর উপর ভিত্তি করে নীচের অংকটা কর তো।

Exercise 51: প্রথমে $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, আর $h(x) = \sqrt{x}$-এর গ্রাফ আঁকো। তারপর সেই গ্রাফ দেখে বল এদের মধ্যে কে বা কারা Lipschitz condition-কে satisfy করে। ■

এবার ভালো করে Lipschitz condition-এর সংজ্ঞাটা একবার পড়ে নাও। সেটা ব্যবহার করে নীচের অংকটা করা একদম সহজ--

Exercise 52: যদি $f(x)$ এমন function হয় যেটা Lipschitz condition-কে satisfy করে, তবে দেখাও যে $f(x)$ অবশ্যই continuous হতে বাধ্য। (সরাসরি continuity-র ϵ-δ-ওয়ালা definition-টা লাগাও। ভয় নেই, অংকটা দুই লাইনে হয়ে যাবে!) ■

শুধু continuity নয়, আরও বেশী কিছু বলা যায়--

Exercise 53: যদি $f(x)$ এমন function হয় যেটা Lipschitz condition-কে satisfy করে, তবে দেখাও যে $f(x)$ অবশ্যই uniformly continuous হতে বাধ্য। ■

Exercise 54: কোনো $f(x)$ যদি Lipschitz condition-কে satisfy করে, তবে কি $f(x)$-টা differentiable হবেই? $f(x) = |x|$ কি Lipschitz condition পালন করে? ■

মনে রেখো যে chord-এর slope-এর limit নিলেই $f'(x)$ পাওয়া যায় (অবশ্য যদি limit-টা exist করে, মানে যদি $f(x)$-টা differentiable হয়)। সুতরাং সব chord-এর slope-ই যদি $-K$ থেকে K-র মধ্যে থাকে, তবে $f'(x)$-ও $-K$ থেকে K-র মধ্যেই থাকতে বাধ্য। সুতরাং $f'(x)$ অবশ্যই bounded হবে। এইটা নিয়েই পরের অংক।

Exercise 55: Let a real-valued function f be differentiable on a bounded open interval I. Show that the derivative f' is bounded on I if and only if f satisfies Lipschitz condition.[3] ■

HINT:
এটা একটা 'if and only if" অংক, তাই দুটো অংশ। প্রথম অংশে দেখাব যে f যদি Lipschitz হয় তবে f'-টা bounded হবে।

<u>f Lipschitz $\implies$ f' bounded:</u>

Given: f satisfies Lipschitz condition on I, *i.e.*,

$$\exists K > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \tag{1}$$

To show: f' is bounded on I, *i.e.*,

Target $\exists M > 0 \quad \forall x \in I \quad |f'(x)| \leq M.$

প্রথম কাজ হল একটা যুৎসই M নেওয়া। বলে দিয়েছে যে chord-এর slope-গুলো সব সময়ে $-K$ থেকে K-র মধ্যে থাকবে। এই slope-গুলোর limit নিলেই $f'(x)$ পাব, তাই $f'(x)$-ও থাকবে $-K$ থেকে K-র মধ্যে। তার মানে K-টাই হল $f'(x)$-এর একটা bound. সুতরাং $M = K$ নিলেই চলবে।

$\boxed{\exists M}$ Choose $M = K$ from (**1**).

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in I$.

Then

$$\forall y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

So

$$\forall y \in I \setminus \{x\} \quad |[|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}|]| \leq K.$$

এখানে বলা হল যে, যে কোনো chord-এর slope-ই $-K$ থেকে K-র মধ্যে থাকবে। ওই যে $y \in I \setminus \{x\}$ লিখেছি তা দেখে ঘাবড়ে যেও না। ওর মানে হল $y \in I$ এবং $y \neq x$. এটা দরকার কারণ chord টানার জন্য দুটো আলাদা বিন্দু লাগে। এবার খালি limit নেওয়ার অপেক্ষা--

Since f is differentiable at $x \in I$, so taking limit as $y \to x$,

$$|f'(x)| \leq K = M,$$

as required.

প্রথম অংশে MVT লাগল না। এবার দ্বিতীয় অংশ, এখানে লাগবে।

<u>f' bounded $\implies$ f Lipschitz:</u>

Given: f' is bounded on I, *i.e.*,

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in I \quad |f'(x)| \le M. \tag{2}$$

To show: f satisfies Lipschitz condition on I, *i.e.*,

Target $\qquad \exists K > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \le K|x - y|.$

$\boxed{\exists K}$ Choose $K = M$ from (2).

ঠিক যেমন প্রথম অংশে $M = K$ নিয়েছিলাম, সেই একই কারণে এবার $K = M$ নিলাম।

$\boxed{\forall x, y}$ Take any $x, y \in I$.

Then, by Lagrange's mean value theorem,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi),$$

where ξ is some number between x and y.
So

$$|[|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}|]| = |f'(\xi)| \le M = K,$$

as required.

Exercise 56: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be differentiable, and let $f'(x)$ be a bounded function. Show that $f(x)$ must be uniformly continuous. ■

DAY 7
Applications of MVT (part 2)

7.1 Lagrange: 4

এবার কিছু প্রয়োগ দেখব যেগুলো দেখতে বেশ খটমট, কিন্তু ছবি আঁকলেই সহজে বোঝা যায়।
প্রথম অংকটা করার আগে একটা জিনিস মনে করে নিই, right continuity কাকে বলে। এটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম। Fig 54 দ্যাখো, তাহলে right continuity-র কথা মনে পড়বে।

Exercise 57: Let f be differentiable for $x > a$, right continuous at $x = a$ and $f'(a+)$ exist. Show that f is right differentiable at a and $f'_+(a) = f'(a+)$.[4] ■

HINT:

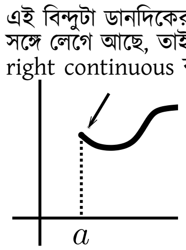


Fig 54

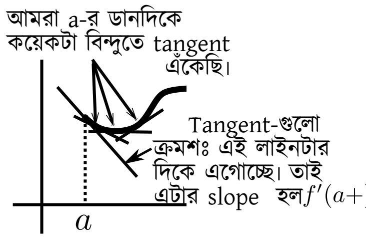


Fig 55

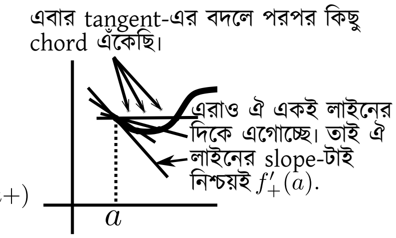


Fig 56

এই অংকটা পড়তে গিয়ে মাথা গুলিয়ে যাওয়া বিচিত্র নয়। এতগুলো শর্ত দিয়েছে কোনটা কোথায় লাগাব ভেবে পাওয়া মুশকিল। এসব ক্ষেত্রে সব সময়ে একটা ছবি এঁকে নিলে সুবিধা হয়। ধরো $f(x)$-এর গ্রাফটা হল Fig 54-এর মত।
এবার চট্ করে বুঝে রাখি যে $f'(a+)$ আর $f'_+(a)$ মানে কি। প্রথমটার মানে হল

$$\lim_{x\to a+} f'(x),$$

অর্থাৎ প্রথমে f-কে $x > a$-তে differentiate করে তার পর x-কে a-র কাছে নিয়ে গিয়ে limit নিলে যেটা হয় সেটা। Fig 55 দ্যাখো। প্রথমে বিভিন্ন $x > a$-তে differentiate করেছি, মানে tangent এঁকে তাদের slope-গুলো দেখছি। এই tangent-গুলো ক্রমশঃই একটা লাইনের সাথে মিশে যাচ্ছে। সেটার slope-ই হল $f'(a+)$.
এবার দেখি $f'_+(a)$ মানে কি। তার জন্য Fig 56 দ্যাখো। $f'_+(a)$ মানে হল $x = a$-তে $f(x)$-এর right derivative, অর্থাৎ

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

তার মানে $f'(a+)$ হল tangent-এর slope-এর limit, আর $f'_+(a)$ মানে হল chord-এর slope-এর limit. আমাদের দেখাতে বলেছে যে এই দুটো সমান।
আশা করি আন্দাজ করতে পারছ যে এখানে mean value theorem কাজে দেবে, কারণ mean value theorem-এর মূল বক্তব্যই হল এই যে একটা chord-এর slope-কে আমরা একটা tangent-এর slope বলে ভাবতে পারি।

To show

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a+),$$

i.e.,

Target $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta) \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in N(f'(a+), \epsilon).$

প্রথমে $\forall\epsilon > 0$ আছে, তাই একটা যে কোনো $\epsilon > 0$ নিয়ে শুরু করি--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আছে $\exists\delta > 0$. তাই একটা উপযুক্ত δ বার করা যাক--

$\because f'(a+)$ exists,

$$\therefore \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta) \quad f'(x) \in N(f'(a+), \epsilon).$$

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this $\delta > 0$.

এবার আছে $\forall x \in (a, a+\delta)$, তাই--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in (a, a+\delta)$.

আমাদের দেখাতে হবে যে $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (মানে a আর x দিয়ে আঁকা chord-এর slope-টা) $f'(a+)$-এর কাছে থাকবে (ϵ দূরত্বের মধ্যে)।
আমরা প্রথমেই chord-এর slope-টাকে একটা tangent-এর slope-এ পরিণত করব, MVT দিয়ে।

Then by Lagrange's mean value theorem,

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \text{ for some } \xi \in (a, x).$$

আর tangent-এর slope যে $f'(a+)$-এর কাছে থাকবে সেটা তো দেওয়াই ছিল--

$\because \xi \in (a, x) \subseteq (a, a+\delta) \quad \therefore f'(\xi) \in N(f'(a+), \epsilon)$.
$\therefore \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in N(f'(a+), \epsilon)$, as required.

Exercise 58: Let f be continuous on $[a,b]$ and c be an interior point of $[a,b]$ and also let f be differentiable on (a,c) and (c,b). If there exists a neighbourhood $(c-\delta, c+\delta) \subset [a,b]$ such that $f'(x)$ keeps the same sign on $(c-\delta, c)$ and $(c, c+\delta)$ then show that f has no extremum at c.[3] ■

HINT:
প্রথমে বুঝে নিই যে ব্যাপারটা কি হচ্ছে। এখানে x-এর কোনো একটা value দিয়েছে c, এবং বলেছে $x=c$-এর বাঁদিকে আর ডানদিকে খানিকটা জায়গা জুড়ে $f'(x)$-এর চিহ্ন একই থাকছে, মানে হয় সব সময়েই positive, নয় সব সময়েই negative. তবে ঠিক $x=c$-তে $f'(x)$ কত (বা আদৌ exist করে কি না) সে বিষয়ে কিছু বলা নেই। বোঝার সুবিধার জন্য ধর $f'(x)$ সব সময়ে positive থাকছে।
এরকম কয়েকটা উদাহরণ রয়েছে Fig 57, Fig 58 আর Fig 59-এ। লক্ষ কর যে, $f(x)$-টা $x=c$-র আগেও বাড়ছে, পরেও বাড়ছে, তাই $x=c$-তে local maximum বা local minimum থাকতে পারছে না। ঠিক এই কথাটাই দেখাতে বলেছে।
ঠিক যে ভাবে ছবি দেখে বুঝলাম সেটাকেই অংকের ভাষায় লিখে দিলেই প্রমাণটা হয়ে যাবে। আমাদের বলেছে যে $f'(x)$-টা c-এর দুধারে চিহ্ন বদলাবে না, কিন্তু চিহ্নটা কি সেটা বলে দেয় নি। আমরা ধরে নেব positive, কারণ negative হলেও মূল যুক্তিটা একই থাকবে, অতএব "similar" লিখে ছেড়ে দেব।

Fig 57

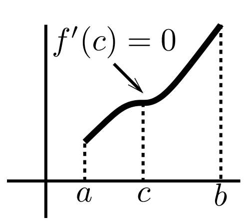


Fig 58

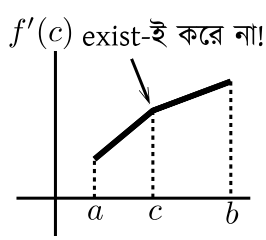
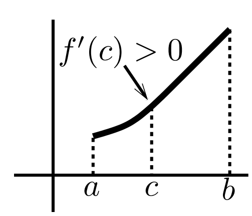


Fig 59



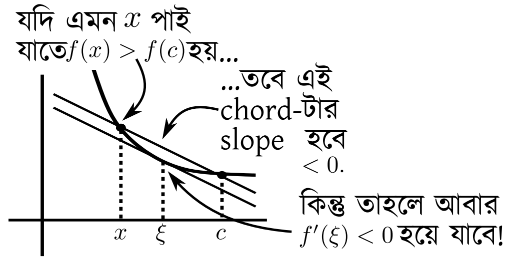


Fig 60

> Let $\forall x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta) \quad f'(x) > 0$.

এই বার ধাপগুলো মাথায় গুছিয়ে নিই। প্রথমে দেখাব যে, $x \in (c-\delta, c)$ নিলে (মানে x যখন c-এর বাঁদিকে) তখন $f(x) < f(c)$ হবে। এতে $x = c$-তে কোনো local minimum থাকার পথ বন্ধ হবে।
এখানেই এই অংকের আসল প্যাঁচটা। আমরা contradiction-এর পথে এগোব।

> Step 1: Shall show $\forall x \in (c-\delta, c) \quad f(x) < f(c)$:
>
> Let, if possible, $\exists x \in (c-\delta, c) \quad f(x) \geq f(c)$.

Fig 60 দ্যাখো। যদি x আর c দিয়ে chord-টা আঁকি তবে সেটার slope কোনোভাবেই positive হতে পারে না।

> Then
> $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

কিন্তু এই slope-টা তো কোনো একটা $f'(\xi)$-এর সমান, কিন্তু $f'(\xi)$ তো > 0 ধরেছি!

> By Lagrange's mean value theorem, the l.h.s. is $f'(\xi)$ for some $\xi \in (x, c)$.
> $$\therefore f'(\xi) \leq 0 (\Rightarrow\Leftarrow \because \xi \in (c-\delta, c)).$$

ব্যস্, এই অংকের এটাই ছিল একমাত্র প্যাঁচ। অংকটা অবশ্য এখনও শেষ হয় নি, কারণ এখনও দেখাতে হবে যে $x = c$-তে local maximum থাকতে পারে না। কিন্তু একই প্যাঁচ সেখানেও খাটবে (চিহ্নগুলোকে উল্টিয়ে নিয়ে)। তাই "similar" লিখে দেওয়া যায়। যদিও তুমি ভালো করে বুঝে নিও যে ঠিক কোথায় কোন চিহ্ন ওল্টাতে হবে। "Similar"-এর দোহাই দিয়ে লেখা এড়ানো ভালো, কিন্তু ওটা যেন শেখা এড়ানোর অজুহাত হয়ে না ওঠে!

> Step 2: Similarly $\forall x \in (c, c+\delta) \quad f(x) > f(c)$.

এবার উপসংহার টানার পালা--

> Step 3: By step 1, $x = c$ cannot be a local minimum. By step 2, it cannot be a local maximum.
>
> So $f(x)$ cannot have local extremum at $x = c$, as required.

> Similar argument holds if
> $$\forall x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta) \quad f'(x) < 0.$$

7.2 Cauchy

খেয়াল করে দ্যাখো আমরা কি ভাবে Cauchy's mean value theorem-এ পৌঁছেছিলাম। প্রথমে Rolle's theorem, তারপর সেটাকে generalise করে Lagrange's mean value theorem, এবং সেটাকেও generalise করে অবশেষে Cauchy's mean value theorem. তার মানে Rolle's theorem এবং Lagrange's mean value theorem এরা দুজনেই হল Cauchy's mean value theorem-এর special case. অতএব ওদের যাবতীয় প্রয়োগকেই আমরা Cauchy's mean value theorem-এর প্রয়োগ বলেও ভাবতে পারি। দেখা যায় যে, অংকের জগতে এই তিনটে theorem-এর মধ্যে সবচেয়ে বেশী কাজে আসে Lagrange's mean value theorem-টাই। কিন্তু এবার কিছু উদাহরণ দেখব যেখানে Cauchy's mean value theorem লাগানোটাই বেশী সহজ।

Exercise 59: If $f'(x)$ exists on $[0, 1]$ then show by Cauchy's mean value theorem that the equation
$$3x^2[f(1) - f(0)] = f'(x)$$
has at least one solution in $(0, 1)$.[2] ■

HINT:

বলেই দিয়েছে যে Cauchy's mean value theorem লাগাতে হবে। অতএব আন্দাজ করতে অসুবিধা হয় না যে, এখানে এমন একটা $g(x)$ জোগাড় করতে হবে যাতে ওই equation-টাকে
$$g'(x)[f(1) - f(0)] = f'(x)[g(1) - g(0)]$$
আকারে লেখা যায়। তার মানে $g'(x) = 3x^2$ আর $g(1) - g(0) = 1$ হলেই চলবে। এরকম একটা $g(x)$ হল $g(x) = x^3$.

> Let $g(x) = x^3$, which is differentiable on $[0, 1]$.
> So by Cauchy's mean value theorem
> $$\exists \xi \in (0, 1) \quad g'(\xi)[f(1) - f(0)] = f'(\xi)[g(1) - g(0)],$$
> or
> $$3\xi^2[f(1) - f(0)] = f'(\xi),$$
> as required.

একই রকম আরেকটা অংক--

Exercise 60: If f' exists in $[0, 1]$, show that
$$f(1) - f(0) = \frac{f'(x)}{2x}$$
has at least one solution in $(0, 1)$.[2] ■

HINT:

> Take $g(x) = x^2$.
> Then g is continuous on $[0,1]$ and differentiable on $(0,1)$.
> So by Cauchy's mean value theorem, $\exists c \in (0,1)$ such that
>
> $$f'(c)(g(1) - g(0)) - g'(c)(f(1) - f(0)) = 0,$$
>
> or,
>
> $$f'(c)(1^2 - 0^2) - 2c(f(1) - f(0)) = 0,$$
>
> or,
>
> $$f(1) - f(0) = \frac{f'(c)}{2c}.$$
>
> Thus the given equation has at least one solution $x = c \in (0,1)$, as required.

এরকম আরও অনেক বানানো যায়। প্রথমে যে কোনো একটা $g(x), a$ আর b নিয়ে শুরু করব, ধর $g(x) = \sin x, a = 0$ আর $b = \frac{\pi}{2}$ নিলাম। তারপর Cauchy's mean value theorem লাগাব 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে--

$$g'(x)\left[f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - f(0)\right] = f'(x)\left[g\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - g(0)\right],$$

মানে

$$\cos x\left[f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - f(0)\right] = f'(x). \qquad (*)$$

এবার অংকটা দেবার সময়ে $g(x)$-এর কথাটা বেমালুম চেপে গিয়ে খালি (*)-টা প্রমাণ করতে বলব। অংকটা যে করবে, তাকে মাথা খাটিয়ে বুঝতে হবে যে $g(x) = \sin x$ নিলে কাজ হবে।
এরকম দুটো অংক নীচে দিলাম হাত পাকানোর জন্য।

Exercise 61: If f' exists in $[0,1]$, show that

$$f(1) - f(0) = e^{-x}(e-1)f'(x)$$

has at least one solution in $(0,1)$. ■

Exercise 62: If f' exists in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, show that

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - f(0) = f'(x)\cos^2 x$$

has at least one solution in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. ■

Answers

1. $f'(a), f'(c) > 0$. $f'(b) < 0$. **2.** $2, 3, 4$. **3.** a, d, f-এ local maximum আর b, c, e-তে local minimum. c, d-তে differentiable নয়। **6.** No. **8.** 1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ এটা 0-তে continuous এবং differentiable. 2. $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \\ (x+2)^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ এটা -2 আর 2-তে

continuous এবং differentiable. 3. $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap (1,\infty) \\ x & \text{if } x \in \mathbb{Q} \cap (-\infty,1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ এটা 0 আর 2-তে continuous, 2-তে differentiable, কিন্তু 0-তে differentiable নয়। **10.** $f(x) = |x|, \quad g(x) = -|x|$. **22.** না, হ্যাঁ, হ্যাঁ, হ্যাঁ, হ্যাঁ, হ্যাঁ। **30.** $p(x) - ce^{-x}$-কে differentiate করে চেষ্টা কর। **34.** সেকণ্ডে গাড়ীটা $\frac{1}{2}$ কিমি পার করেছে। সুতরাং MVT বলছে যে কোথাও না কোথাও গাড়ীটার বেগ $\frac{1/2}{20}$ km/sec, মানে ঘন্টায় 90 কিমি হয়েছিল। **38.** Lagrange না, Cauchy হ্যাঁ। **43.** Yes. **45.** $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{otherwise} \end{cases}$ এখানে $f'(1) = 1 > 0$. কিন্তু $f(x)$-টা ক্রমাগত $y = x$ আর $y = \frac{1}{2}x^2$-র গ্রাফের মধ্যে লাফালাফি করে চলেছে তাই কখনোই increasing থাকছে না। **51.** $f(x)$ আর $h(x)$. **54.** না, হ্যাঁ।

Chapter II
Differentiation (part 2)

DAY 8
Global extremum

ধরো তোমাকে একটা function দিলাম $f : D \to \mathbb{R}$ যেখানে $D \subseteq \mathbb{R}$ হল function-টার domain of definition. যদি এমন কোনো $a \in D$ থাকে যাতে

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq f(a)$$

হয় (মানে x-এর কোনো value-র জন্যই $f(x)$ কখনো $f(a)$-এর চেয়ে বড় না হয়), তবে বলব "$f(x)$ has global maximum at $x = a$."
Fig 1-এ কিছু উদাহরণ রয়েছে।
একইভাবে যদি এমন $b \in D$ পাই যাতে

$$\forall x \in D \quad f(x) \geq f(b)$$

হয়, তবে বলব $f(x)$ has global minimum at $x = b$.
অবশ্য যে কোনো function-এরই যে global maximum বা minimum থাকবে, এমন কোনো কথা নেই। যেমন যদি $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ নিই $f(x) = \frac{1}{x}$, তবে f(x)-এর ওঠারও শেষ নেই, নামারও শেষ নেই (Fig 2)। তাই কোনো global maximum বা global minimum নেই। আরেকধরণের উদাহরণ হল $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = x$. এর global maximum নেই, কিন্তু global minimum আছে (Fig 3).

Exercise 1: নীচের দুটো $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ দিলাম। এদের মধ্যে কার বা কাদের global maximum বা global minimum আছে বল।
(1) $f(x) = x^2$, **(2)** $f(x) = x^3$. ■

8.1 Global **বনাম** local

Global maximum বা minimum-এর বেলায় "global" কথাটা আসছে কেন? কারণ আমরা এখানে পুরো domain of definition-টা নিয়ে কাজ করছি (ওই যে গোড়াতে "$\forall x \in D$" রয়েছে)! যদি খালি কোনো point-এর neighbourhood

Fig 1

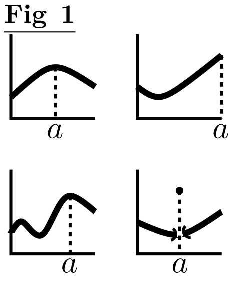


Fig 2

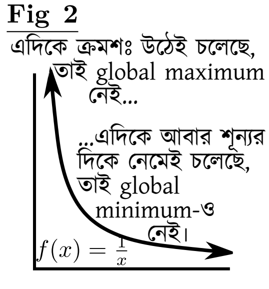
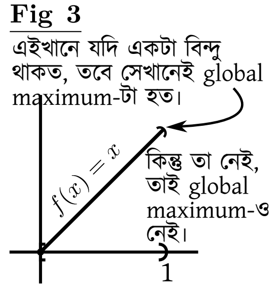


Fig 3



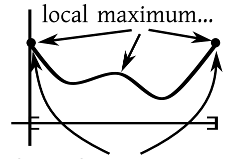


Fig 4

নিয়ে কাজ করতাম তবে পেতাম local maximum আর local minimum, যেমনটা করেছিলাম প্রথম অধ্যায়ে। সেখানে আমরা "$\forall x \in D$" না লিখে "$\forall x \in N(a,\delta) \cap D$" লিখেছিলাম।

মনে রেখো যে global maximum (minimum) মাত্রেই local maximum (minimum)-ও বটে। কিন্তু local maximum (minimum)-রা সবসময়ে global maximum (minimum) নাও হতে পারে (Fig 4)। যেমন পুরো ইউনিভার্সিটির মধ্যে যে প্রথম হয়েছে, সে অবশ্যই তার কলেজের মধ্যেও সবচেয়ে বেশী নম্বর পেয়েছে। কিন্তু কেউ একজন তার নিজের কলেজের ভিতর সবচেয়ে বেশী নম্বর পেলেই যে গোটা ইউনিভার্সিটির মধ্যে প্রথম স্থান অধিকার করবে এমন কোনো কথা নেই!

Maximum আর minimum-দের একসঙ্গে বলে extremum (বহুবচনে extrema). সুতরাং যদি তোমাকে একটা $f(x)$ দিয়ে দেখাতে বলে যে কোনো একটা $x = a$-তে একটা global extremum আছে, তাহলে তোমাকে দেখাতে হবে যে হয় সেখানে একটা global maximum আছে, নয় একটা global minimum আছে।

8.2 Using definition

কোনো function-এর কোথায় maximum বা minimum আছে সেটা বার করা অনেক সময়েই প্রয়োজন হয়। হায়ার সেকণ্ডারীতে পড়ার সময়ে অনেক ছাত্রছাত্রীর মনেই এরকম একটা আবছা ধারণা জন্মায় যে, $f(x)$-এর extremum বার করতে দিলেই $f(x)$-কে ধাঁ করে differentiate করে $f'(x) = 0$ solve করতে হয়। এই পদ্ধতিটা অনেক সময়েই কাজে লাগে বটে, কিন্তু দুঃখের কথা এটা সব সময়ে কাজ করে না। ঠিক কখন এই পদ্ধতিটা কাজ করে (এবং কেন করে) সেটা শেখা আমাদের একটা প্রধান উদ্দেশ্য। তবে কিছু কিছু সোজা অংক আছে যেখানে এত সব differentiation-টিফারেনশিয়েশনের ঝামেলায় না গিয়ে সরাসরি definition লাগিয়ে global extremum বার করে ফেলা যায়। সেরকম কিছু উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

এই উদাহরণগুলোর প্রত্যেকটাতেই একটা করে function $f(x)$ আর একটা a দিয়ে দেখাতে বলেছে $x = a$-তে কোনো global extremum আছে কি না। প্রতি ক্ষেত্রেই ইচ্ছে করে এমন $f(x)$ আর a দিয়েছে যাতে $f'(a)$ exist না করে।

এই জাতীয় অংক করার সময়ে এটা খেয়াল রেখো যে $x \in \mathbb{R}$ হলে $|x|$ এবং x^2 কখনও negative হতে পারে না।

Exercise 2: Does an extreme value exist for the function $3 + (x-3)^{2/3}$ at $x = 3$?[3] ■

HINT:

> Let $f(x) = 3 + (x-3)^{2/3}$.

তাহলে দেখাই যাচ্ছে যে, $f(3) = 3$. কারণ তখন ওই $(x-3)^{2/3}$ অংশটা শূন্য হয়ে যাবে।

> Then $f(3) = 3$.

কিন্তু যদি $x \neq 3$ হয় তবে ওই $(x-3)^{2/3}$ অংশটা সম্পর্কে কি বলা যায়? লক্ষ কর যে যেহেতু $\frac{2}{3}$-এর উপরে 2 আছে, তাই ওটা আসলে একটা square, $\left((x-3)^{\frac{1}{3}}\right)^2$, এবং তাই কখনও < 0 হতে পারে না।

> But if $x \neq 0$ then $f(x) > 0, \because (x-3)^{2/3} = \left((x-3)^{\frac{1}{3}}\right)^2 > 0.$
> So f has a global minimum at $x = 3$.

পরের অংকটাও একই রকমের সহজ।

Exercise 3: Examine whether $f(x) = 1 - |x|$ has a maximum or minimum at $x = 0$.[3] ■

HINT:

> Here $f(0) = 1 - |0| = 1$.
> But if $x \neq 0$ then $f(x) = 1 - |x| < 1$.
> So f has a global maximum at $x = 0$.

এর পরের অংকটা করার আগে $f(x) = |x|$ function-টার সম্বন্ধে কয়েকটা কথা বলা দরকার। এর গ্রাফটা দেখতে যে Fig 5-এর মত সেটা তো জানোই। লক্ষ কর এখানে $x = 0$-তে একটা খোঁচ আছে, তার দুইধারেই গ্রাফটা একদম সোজা। যদি $f(x) = |x-2|$ নিতাম তবে গ্রাফটা হত Fig 6-র মত, এবার খোঁচটা সরে এসেছে 2-তে। একইভাবে $f(x) = |3-x|$ হলে খোঁচটা থাকত 3-এ (কারণ $|3-x| = |x-3|$). এবার নীচের অংকটায় হাত দেওয়া যাক।

Exercise 4: Prove that $f(3)$ is a minimum value of

$$f(x) = |3-x| + |2+x| + |5-x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

but $f'(3)$ does not exist.[3] ■

HINT:
যখন global বা local উল্লেখ না করে খালি minimum বা maximum বলে, তখন global বুঝে নিতে হয়।
এখানে $f(x)$-এর তিনটে অংশ আছে, প্রত্যেকটাতে একটা করে খোঁচ আছে। সব মিলিয়ে তিনটে খোঁচ---$-2, 3$ আর 5-এ। এই তিনটে খোঁচের ফাঁকে ফাঁকে গ্রাফটা হবে সরলরেখা। এই অংকটা করার একটা কায়দা হল এই সবগুলো সরলরেখার equation বার করে ফেলা। শেষ পর্যন্ত কি দাঁড়াবে সেটার আন্দাজ পাবে Fig 7 দেখলে।

> For $x \in (-\infty, -2]$,
>
> $$f(x) = |3-x| + |2+x| + |5-x| = (3-x) - (2+x) + (5-x) = 6 - 3x.$$

লক্ষ কর যে x-এর coefficient এখানে negative, তাই এটা একটা decreasing function. ফলে x যত বাড়বে ততই এর value কমবে। সুতরাং এর minimum-টা হবে $(-\infty, 2]$-এর একেবারে ডানপ্রান্তে গিয়ে মানে $x = 2$-তে--

Fig 5

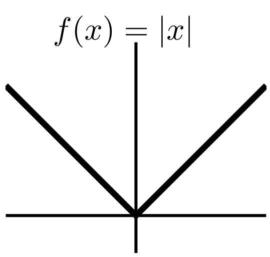


Fig 6

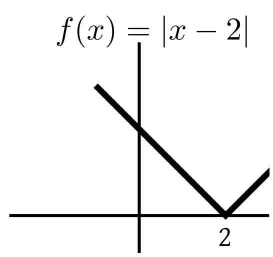
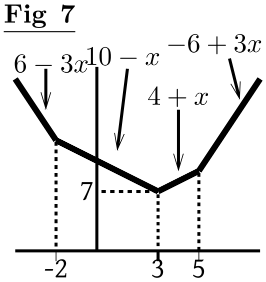


Fig 7



This is a decreasing function. So minimum value over $(-\infty,-2]$ is $f(-2) = 6-3\times(-2) = 12$.

একইভাবে -2 থেকে 3-এর মধ্যেও--

For $x \in [-2,3]$,

$$f(x) = |3-x| + |2+x| + |5-x| = (3-x) + (2+x) + (5-x) = 10-x.$$

This is a decreasing function. So minimum value over $[-2,3]$ is $f(3) = 10-3 = 7$.

এবং 3 থেকে 5 পর্যন্ত--

For $x \in [3,5]$

$$f(x) = |3-x| + |2+x| + |5-x| = -(3-x) + (2+x) + (5-x) = 4+x.$$

This is a increasing function. So minimum value over $[3,5]$ is $f(3) = 4+3 = 7$.

আর সব শেষে $x \geq 5$-এর জন্য--

For $x \in [5,\infty)$

$$f(x) = |3-x| + |2+x| + |5-x| = -(3-x) + (2+x) - (5-x) = -6+3x.$$

This is a increasing function. So minimum value over $[5,\infty)$ is $f(5) = 6+3\times 5 = 21$.
So $f(x)$ has a (global) minimum at $x=3$, as required.

এবার দ্বিতীয় অংশ, দেখাতে হবে যে $f'(3)$ exists করে না--

Also, $f(x) = 4+x$ when $x \in [3,5]$. So right derivative of $f(x)$ at $x=3$ is

$$\frac{d}{dx}(4+x)\Big|_{x=3} = 1.$$

Again, $f(x) = 10-x$ when $x \in [-2,3]$. So left derivative of $f(x)$ at $x=3$ is

$$\frac{d}{dx}(10-x)\Big|_{x=3} = -1.$$

Since the left and right derivatives are unequal, so $f'(3)$ does not exist.

Exercise 5: Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined as

$$f(x) = |x+1| + |x-1|.$$

Then show that $f(x)$ attains global minimum at every point in $[-1,1]$. ■

8.3 A first order condition

এতক্ষণ যে কয়টা অংক দেখলাম সেখানে function-গুলো differentiable ছিল না। কিন্তু যদি differentiable হয়, তবে কাজটা অনেক সহজ হয়ে যায়। কারণ তখন নীচের theorem-টা লাগানো যায়।

> **THEOREM**
>
> Let $f:(p,q)\to\mathbb{R}$ be a function, and $a\in(p,q)$ be a number such that
>
> - $f(x)$ is differentiable everywhere in (p,q),
> - for $x\in(p,q)$
>
> $$f'(x)\begin{cases}\le 0 & \text{if } x<a\\ \ge 0 & \text{if } x>a\end{cases}$$
>
> Then $f(x)$ must have a global minimum at $x=a$.

Proof:

To show

Target $\forall b\in(p,q)\quad f(b)\ge f(a)$.

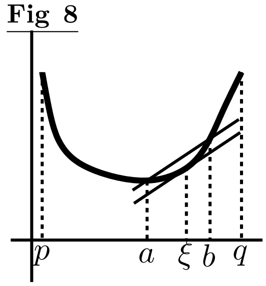
$\forall b$ Take any $b\in(p,q)$.

এবার তিনটে কেস হতে পারে, হয় $b=a$, নয় $b>a$ আর নয়তো $b<a$. এর মধ্যে $b=a$ হলে কিছুই প্রমাণ করতে হবে না, কারণ তাহলে $f(b)=f(a)\ge f(a)$.

If $b=a$ then nothing to prove.

অন্য দুটো কেসে Lagrange's mean value theorem লাগাব। প্রথমে $b>a$ নিয়ে কাজ করব। Fig 8 দ্যাখো।

Fig 8



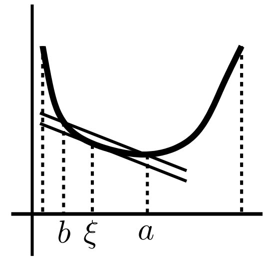


Fig 9

Case I: $b > a$: Then f is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b).
$\therefore$ By Lagrange's mean value theorem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

for some $\xi \in (a, b)$.
$\because \xi \in (a, b) \subseteq (a, q), \therefore f'(\xi) \geq 0$.
$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$.
$\therefore f(b) \geq f(a)$, since $b > a$.

যদি $b < a$ হয় তবেও একই রকম যুক্তি খাটে (Fig 9).

Case II: $b < a$: Similarly as above, by Lagrange's mean value theorem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

for some $\xi \in (b, a)$.
$\because \xi \in (b, a) \subseteq (p, a), \therefore f'(\xi) \leq 0$.
$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$.
$\therefore f(b) \geq f(a)$, since $b < a$.
So always $f(b) \geq f(a)$, as required.

[Q.E.D]

এই যে theorem-টা শিখলাম এটাকে একটুআধটু বদলে আরও নানা রকম theorem বানানো যায়, যাদের প্রমাণ সব একইরকম।

Exercise 6: Let $f : (p, q) \to \mathbb{R}$ be a differentiable function, and $a \in (p, q)$ be a number such that

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{if } x \in (p, a) \\ \leq 0 & \text{if } x \in (a, q) \end{cases}$$

Then show that $f(x)$ must have a global maximum at $x = a$. ■

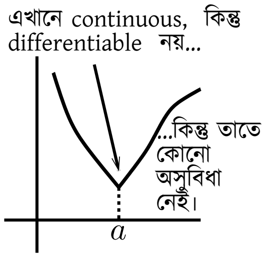


Fig 10

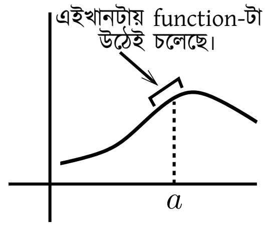


Fig 11

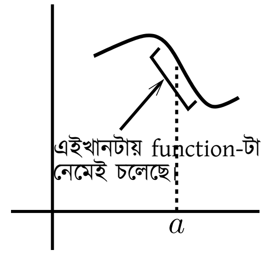


Fig 12

লক্ষ কর যে, আমরা $f'(a)$ নিয়ে কখনোই কাজ করছি না। তাই $f(x)$ যদি $x = a$-তে differentiable নাও হয়, তবেও অসুবিধা নেই, খালি continuous হলেই চলবে (Fig 10)।

Exercise 7: Let $f : (p, q) \to \mathbb{R}$ be a function differentiable everywhere except possibly at some point $a \in (p, q)$. If $f(x)$ is continuous at $x = a$ and

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{if } x < a \\ \geq 0 & \text{if } x > a \end{cases}$$

Then show that $f(x)$ must have a global minimum at $x = a$. ■

এবার Fig 11 দ্যাখো। এখানে কি $x = a$-তে কোনো extremum আছে বলে মনে হচ্ছে, global কি local যাই হোক? নিশ্চয়ই নয়, কারণ $x = a$-তে গ্রাফটায় কোনো বাঁক নেই, খালি উঠেই চলেছে। একইরকম ব্যাপার হচ্ছে Fig 12-তেও , এখানেও গ্রাফটায় কোনো বাঁক নেই, খালি নেমেই চলছে। তার মানে লক্ষ কর $x = a$-র দুই পাশে আচরণ একইরকম হলে সেখানে কোনো local extremum থাকতে পারে না। Local extremum-এর জন্য দরকার একদিকে ওঠা অন্যদিকে নামা। এই কথাটা মাথায় রেখে আগের অংকগুলোর মত এগোলেই নীচের অংকটা করতে পারবে।

Exercise 8: Let $f : (p, q) \to \mathbb{R}$ be differentiable everywhere on (p, q) except possibly at $x = a$. If

$$\exists \delta > 0 \quad f'(x) \text{ keeps same sign on } N'(a, \delta),$$

then check if $f(x)$ can have a local extremum (or global extremum) at $x = a$. ■

একইভাবে এটা দেখাতে পারো?

Exercise 9: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous everywhere, and $a \in \mathbb{R}$ is a given number. The function $f(x)$ is differentiable everywhere except at finitely many points. For each $x < a$ where f is differentiable, $f'(x) > 0$. Similarly, for each $x > a$ where f is differentiable, $f'(x) < 0$. Then show that f must have a global maximum at $x = a$. ■

Exercise 10: If, for a function f of x,

$$f'(x) = (x - a)^2 (x - b)^3,$$

show that f has no extremum at a but has an extremum at b.[3] ■

HINT:

> We assume $a \neq b$.

এই কথাটা আসলে অংকটাতে বলে দেওয়া উচিত ছিল, দেয় নি যখন আমরাই বলে নিলাম। আমাদের মাথা ব্যথা $f'(x)$-এর চিহ্ন নিয়ে। এর মধ্যে $(x-a)^2$ সব সময়েই positive, তাই চিহ্ন নির্ধারণে ওর কোনো ভূমিকা নেই।

> For any $x \neq a$ we have $(x-a)^2 > 0$.
> $\therefore f(x)$ has same sign as $(x-b)^3$.

লক্ষ কর $x = a$-র দুই পাশেই $f'(x)$-এর চিহ্ন একই। সুতরাং ওখানে কোনো extremum থাকতে পারে না।

> Step 1: Let $\delta = |a-b| > 0$.
> Then $\forall x \in N'(a, \delta) \quad f'(x) \neq 0$ and keeps same sign.
> $\therefore f(x)$ has no extremum at $x = a$.

কিন্তু $x = b$-তে চিত্রটা অন্যরকম--

> Step 2:
>
> $$\therefore f'(x) \begin{array}{ll} \leq 0 & \text{if } x < b \\ \geq 0 & \text{if } x > b \end{array}$$
>
> Also $f(x)$ is continuous at $x = b$, since $f'(b)$ exists.
> $\therefore f(x)$ has global extremum (minimum) at $x = b$.

Exercise 11: If for a function defined over $[p, q]$ such that $a, b \in [p, q]$ and

$$f'(x) = (x-a)^2(x-b)^3 \quad \forall x \in [p, q]$$

then show that f has no extremum at a, but has a minimum at b.[3] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

DAY 9
Practical applications

এবার আমরা এতক্ষণ যা শিখলাম তার কিছু বাস্তব প্রয়োগ দেখব।

Exercise 12: An open tank with square base must have capacity of v litres. What will be the size if least amount of tin is used?[3] ■

HINT:

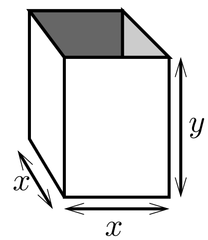


Fig 13

প্রথমে বুঝে নিই ব্যাপারটা কি হচ্ছে। আমাদের কাছে একটা জলের ট্যাংক আছে Fig 13-এর মত। এর তলাটা একটা square, আর ওপরের ঢাকনা নেই। বলেছে যে মোট volume (আয়তন) হল v লিটার। তার মানে যদি তলার প্রতিটা side-এর দৈর্ঘ্য হয় x cm করে আর height হয় y cm তবে ট্যাংকটার volume হবে

$$x \text{ cm} \times x \text{ cm} \times y \text{ cm} = x^2 y \text{ cm}^3.$$

এদিকে বলা আছে যে volume-টা আসলে v লিটার, মানে $1000v$ cm^3, যেহেতু এক লিটার মানে 1000 cm^3. তাই

$$x^2 y = 1000v.$$

কিন্তু খালি এই তথ্য থেকে x, y ঠিক কত হবে তা নিশ্চিত হয়ে বলা যায় না। অনেক রকম x, y নিলেই এই শর্ত পালিত হবে, যেমন $x = y = 10\sqrt[3]{v}$ নিতে পারি, আবার $x = 1,\ y = 1000v$-ও নিতে পারি। বলে দিয়েছে যে এমন ভাবে x, y নিতে হবে যেন ট্যাংকটা বানাতে সবচেয়ে কম টিন লাগে। টিনের প্রয়োজন ট্যাংকের তলাটা আর চারধারের দেওয়ালগুলো বানাতে। এদের area-গুলো হল--

তলার area $= x^2$ cm^2

প্রতিটি দেওয়ালের area $= xy$ cm^2

$\therefore$ মোট area $= x^2 + 4xy$ cm^2.

তার মানে আমাদের কাজ হল এমনভাবে x, y নেওয়া যাতে $x^2 y = 1000v$ হয় এবং এরকম যাবতীয় x, y-এর মধ্যে যেন $x^2 + 4xy$ হয় minimum.

> Let the sides of the square base be x cm, and the height be y cm.
>
> Then we need the total volume to be v lit, ie,
>
> $$x^2 y = 1000v. \qquad (\mathbf{1})$$
>
> Also the total amount of tin required is the outer surface area, which is
>
> $$x^2 + 4(xy). \qquad (\mathbf{2})$$
>
> So we have to minimise $(\mathbf{2})$ w.r.t. $x, y > 0$ subject to $(\mathbf{1})$.

এই কথাটা কি ভাবে লিখলাম দ্যাখো। এখানে "w.r.t. $x, y > 0$" মানে হল আমাদের বার করতে হবে x আর y-এর value, এবং সেই value-দুটোকেই > 0 হতে হবে। আর "subject to $(\mathbf{1})$" মানে "যাতে $x^2 y = 1000v$ শর্তটা পালিত হয়"।

এতক্ষণ আমরা বাস্তব জীবনের একটা সমস্যাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করলাম। এবার তার সমাধানে হাত দেওয়া যাক।

প্রথম কাজ হল $(\mathbf{1})$ ব্যবহার করে x আর y-এর মধ্যে যেকোনো একটাকে বিদায় করা। মানে হয় $x = \sqrt{1000v/y}$ বসানো বা $y = 1000v/x^2$ বসানো। এর মধ্যে দ্বিতীয়টা দেখতে বেশী মিষ্টি (square root-এর ঝামেলা নেই), তাই ওটাই ব্যবহার করি--

> From (**1**) $y = 1000v/x^2$. Putting this in (**2**) we have to minimise
>
> $$f(x) = x^2 + 4(xy) = x^2 + \frac{4000vx}{x^2} = x^2 + \frac{4000v}{x}$$
>
> w.r.t. $x > 0$.

এর ফলে আমাদের দুটো সুবিধা হল--এক, এখন আর x, y দুটো জিনিস নেই, খালি x আছে। দুই, এখন আর কোনো "subject to" লিখতে হচ্ছে না, কারণ ওই শর্তটা আমরা হিসেবের মধ্যে ধরে নিয়েছি।
এবার লক্ষ কর যে $f(x)$-টা সর্বত্রই differentiable. সুতরাং differentiate করে ওর minimum বার করার চেষ্টা করা যায়। এর জন্য প্রথমে $f'(x)$ বার করব আর দেখব কোথায় $f'(x) = 0$ বা < 0 বা > 0. পুরো ব্যাপারটা আমরা এক লাইনে লিখতে পারি $\lesseqgtr$ ব্যবহার করে।

> Now $f'(x) = 2x - \frac{4000v}{x^2}$.
> Clearly,
>
> $$f'(x) \lesseqgtr 0 \text{ according as } x \lesseqgtr \sqrt[3]{2000v}.$$

ব্যস্, তার মানে $\sqrt[3]{2000v}$-এর আগে $f(x)$ হল decreasing, আর পরে হল increasing. সুতরাং $x = \sqrt[3]{2000v}$-তে $f(x)$-এর global minimum থাকতে বাধ্য (যেহেতু ওখানে $f(x)$-টা continuous).

> Thus $f(x)$ attains minimum value at $x = \sqrt[3]{2000v}$, which is the optimal value for the side of the base. The optimal height is
>
> $$y = \frac{1000v}{x^2} = \frac{1000v}{(2000v)^{2/3}}.$$

এই ট্যাংকের অংকটার মূল কাঠামোটা লক্ষ কর (Fig 14)। আমাদের কাছে দুটো variable ছিল x আর y. যদি x, y জানা থাকে তবে আমরা তা থেকে দুটো জিনিস বার করতে পারি volume আর area. এর মধ্যে একটা বলে দিয়েছিল--volume. তার ফলে x, y-এর মধ্যে একটা সম্পর্ক পেয়েছিলাম। এবার অন্যটাকে (মানে area-টাকে) minimise করতে বলেছিল। এই একই কাঠামো ব্যবহার করে আরও অনেক অংক করা যায়। নীচে কয়েকটা উদাহরণ দিলাম।

Example 1: একটা লোক একটা rectangular বাগান করতে চায়। বাগানের চারদিকে বেড়া দিতে হবে। লোকটার কাছে বেড়া বাঁধবার যা উপকরণ আছে তাতে মোট 20 মিটার বেড়া দেওয়া যায়। বাগানের দৈর্ঘ্য প্রস্থ কত কত নিলে বাগানের area-টা maximum হবে?

SOLUTION: Fig 15 দ্যাখো। এখানে বেড়াটা মোট $2(x + y)$ মিটার লম্বা। তার মানে $2(x + y) = 20$. এথেকে লিখতে পারি $y = 10 - x$. বাগানের area হল $xy = x(10 - x)$. সুতরাং আমাদের কাজ হল $f(x) = x(10 - x)$-এর

Fig 14

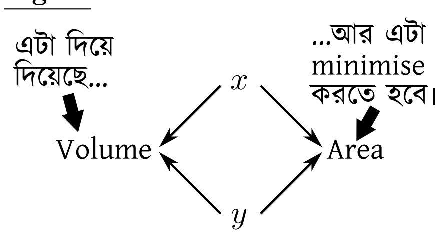


Fig 15

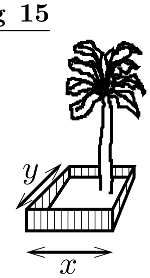
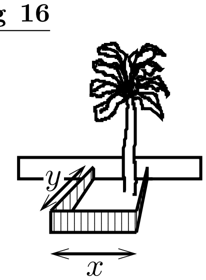


Fig 16



maximum বার করা যেখানে $0 < x < 10$. এখানে $x > 0$ কারণ তা নইলে বাগানটার অস্তিত্ব থাকে না। একইভাবে $y > 0$ তাই $10 - x > 0$ মানে $x < 10$. এবার খালি differentiate করার অপেক্ষা। চেষ্টা করে দ্যাখো। ■

নীচের অংকদুটো এরই সামান্য রকমফের--

Exercise 13: আবার একই অংক, খালি এবার বাগানের এক ধারে একটা দেওয়াল আছে, তাই ও দিকটায় বেড়ার প্রয়োজন নেই, খালি তিন দিকে বেড়া দিলেই হবে (Fig 16)। মোট বেড়ার দৈর্ঘ্য এবারও 20 মিটার। বাগানের মোট area-টা maximum করার জন্য x, y কি কি নেবে? ■

Exercise 14: আবার একই রকম অংক, এবার দুইদিকে দেওয়াল আছে (Fig 17). এবার x, y কি ভাবে নিলে area-টা maximum হবে? ■

Exercise 15: A rectangle is inscribed in a right-angled triangle so as to have one angle coincident with the right angle. Prove that its area is maximum when the opposite corner bisects the hypotenuse.[5] ■

HINT:
এই অংকটাও জ্যামিতির ভাষাতেই দেওয়া হয়েছে। তবে এবার জ্যামিতিটা একটু বেশী কঠিন, খালি rectangle নয়, তার সঙ্গে একটা right-angled triangle-ও আছে, মানে সমকোণী ত্রিভুজ। একটা triangle-টার পেটের মধ্যে একটা rectangle আছে, যার একটা কোনা triangle-টার right angle-এ আর বিপরীত কোনাটা triangle-টার hypotenuse-এ। এরকম অনেক rectangle আঁকা যায় (Fig 18). প্রশ্ন হল কিভাবে আঁকলে area-টা maximum হবে। প্রথম কাজ হল পুরো অংকটাকে দুটো variable x আর y দিয়ে প্রকাশ করা। জ্যামিতিটা জটিল হলে সাধারণতঃ এই প্রথম ধাপটা করতে গিয়েই ছাত্ররা বেশী খাবি খায়। এখানে অংকটা দেওয়া হয়েছে geometry-র ভাষায়। সেটাকে x, y দিয়ে লেখার জন্য সবচেয়ে ভালো কায়দা হল coordinate geometry ব্যবহার করা। আসলে coordinate geometry বিষয়টার আবিষ্কারই হয়েছে ঠিক এই কাজের জন্য, geometry-র জিনিসপত্রকে বিভিন্ন x, y, z ইত্যাদি দিয়ে algebra-র মত করে লিখতে। René Descartes এই coordinate geometry নামক ব্যাপারটা আবিষ্কার না করলে নিউটনের পক্ষে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করা সম্ভবই হত না! যাক গে, ইতিহাসের কথা ছেড়ে আমাদের অংকে ফিরে আসি।
Coordinate geometry-তে প্রথম কাজ হল দুটো যুৎসই axis খাড়া করা, মানে দুটো লাইন নেওয়া যারা পরস্পরের সঙ্গে right angle-এ থাকে। Axis-দুটো যেমন খুশী নেওয়া যায়, তাতে উত্তর একই থাকবে, কিন্তু একটু সুন্দর করে নিলে অংকটা সহজে হয়। আমরা এখানে Fig 19-এর মত করে axis-দুটো নেব। তাহলেই hypotenuse-টার equation হবে

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Fig 17

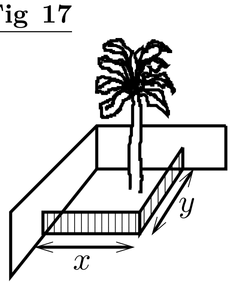


Fig 18

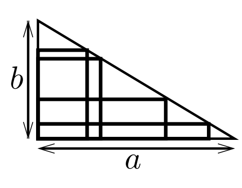
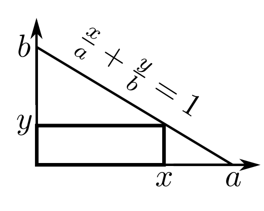


Fig 19



> Let the triangle be as shown in Fig 19.
>
> Let the sides of the rectangle be x and y as shown.
>
> Then
> $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$
> or
> $$y = b(1 - \tfrac{x}{a}).$$
> So the area of the rectangle is
> $$xy = xb(1 - \tfrac{x}{a}) = f(x), \text{ say.}$$
> Then $f'(x) = b(1 - \frac{x}{a}) - \frac{bx}{a}$.
>
> Thus
> $$f'(x) \lesseqqgtr 0 \text{ according as } x \gtreqqless \tfrac{a}{2}.$$
> $\therefore f$ is maximum at $x = \frac{a}{2}$.
>
> So $y = \frac{b}{2}$. Hence the opposite corner $(x, y) = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ bisects the hypotenuse, as required.

Exercise 16: Show that the semi-vertical angle of the cone of maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1}\sqrt{2}$.[5] ■

HINT:

প্রথমে বুঝে নিই ব্যাপারটা কি হচ্ছে। Cone কাকে বলে সে তো জানোই, কতকটা পূজো প্যাণ্ডেলের মাইকের মত একটা জিনিস, যেমন Fig 20-এ কয়েকটা দেখিয়েছি। যে কয়টা cone দেখিয়েছি তারা দেখতে আলাদা হলেও ওদের প্রত্যেকেরই একটা বৈশিষ্ট্য কিন্তু সবার ক্ষেত্রেই এক--প্রত্যেকেরই slant height সমান, যার নাম দিয়েছি ℓ. চোখে দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে এদের সবার volume সমান নয়। যেমন প্রথমটা বড্ড সরু তাই volume কম। আবার শেষেরটা সরু না হলেও, ভীষণ বেঁটে, তাই ওটার volume-ও বেশ কমই হবে। মাঝামাঝি আকারের cone-এর volume-টাই সবচেয়ে বেশী হবে বলে মনে হচ্ছে। আমাদের অংকটা সেটা নিয়েই--একই slant height-এর বিভিন্ন cone-এর মধ্যে volume সবচেয়ে বেশী কার? এর জন্য একই slant height-বিশিষ্ট বিভিন্ন cone-দের সনাক্ত করার কোনো হাতিয়ার চাই। অংক করার সময়ে তো আর "বড্ড সরু", "ভীষণ বেঁটে" এরকমভাবে বলা যাবে না। সনাক্ত করার নানা কায়দা হতে পারে, radius দিয়ে, height দিয়ে, ইত্যাদি। এই অংকে অবশ্য বলেই দিয়েছে যে semi vertical angle দিয়ে প্রকাশ করতে হবে (Fig 21)।

Fig 20

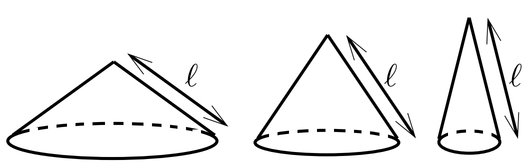
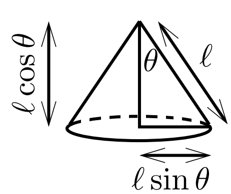


Fig 21



> Let the given slant height be ℓ.
> Let the variable semi-vertical angle be $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

লক্ষ কর আমরা বলে নিয়েছি যে θ থাকতে পারে 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে। এই কথাটা এক্ষুণি কাজে লাগবে।
এবার যখন cone-গুলোকে সনাক্ত করা গেছে, তাহলে তাদের volume বার করা যাক। Cone-এর volume-এর ফর্মুলা $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, যেখানে r হল base-এর radius আর h হল height. আমাদের প্রথম কাজ হল এই rআর h-কে θ দিয়ে প্রকাশ করা।

> Then the the cone has
>
> - height $h(\theta) = \ell \cos\theta$,
> - base radius $r(\theta) = \ell \sin\theta$.
>
> $\therefore$ The volume is
>
> $$V(\theta) = \frac{1}{3}\pi r(\theta)^2 h(\theta) = \underbrace{\frac{1}{3}\pi\ell^3}_{A,\ \text{say}} \sin^2\theta\cos\theta.$$

এবার যথারীতি differentiate করব θ-র সাপেক্ষে। তাই θ-বিহীন অংশগুলোকে A নাম দিয়ে দিয়েছি, ওগুলো তো আর differentiation-এর ফলে বদলাবে না, তাই বার বার একই জিনিস লিখে যেতে হবে। সেই কারণেই সংক্ষিপ্ত নাম দেওয়া।

> So $V'(\theta) = A(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta) = A\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$.
> Now $A > 0$ and $\sin\theta > 0$, since $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

দেখলে, θ যে $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-এর মধ্যে আছে, সেই কথাটা কিভাবে কাজে লাগল?

> So we have
>
> $$\begin{aligned} & V'(\theta) \lesseqqgtr 0 \\ \iff\quad & (2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \lesseqqgtr 0 \\ \iff\quad & (2 - \tan^2\theta) \lesseqqgtr 0 \quad \left[\ \because \theta \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)\right] \\ \iff\quad & (\sqrt{2} - \tan\theta) \lesseqqgtr 0 \quad \left[\ \because \tan\theta > 0 \text{ for } \theta \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)\right] \\ \iff\quad & (\tan^{-1}\sqrt{2} - \theta) \lesseqqgtr 0 \quad \left[\ \tan\theta \text{ is strictly increasing for } \theta \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

দ্যাখো "$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$" কতবার কাজে লাগছে।

> Thus $V(\theta)$ increases for $\theta < \tan^{-1}\sqrt{2}$, becomes stationary at $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$, and decreases for $\theta > \tan^{-1}\sqrt{2}$.
> Hence the global maximum is attained at $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$, as required.

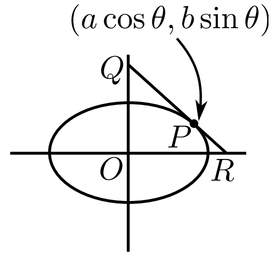


Fig 22

Exercise 17: A tangent to an ellipse meets its axes in Q and R. Show that the least value of QR is equal to the sum of the semi-axes of the ellipse and that QR is divided at the point of contact in the ratio of its semi-axes.[4] ■

HINT:
লক্ষ কর এখানে অংকটা পুরো জ্যামিতির ভাষায় দেওয়া আছে, কোথাও কোনো x, y, equation ইত্যাদি নেই। এরকম ক্ষেত্রে প্রথম কাজ হল পুরো ব্যাপারটাকে coordinate geometry দিয়ে প্রকাশ করে নেওয়া। আমরা ellipse-টার centre দিয়ে axis-দুটো নেব যেমন Fig 22-এ দেখানো হয়েছে। তাহলে ellipse-এর উপর যে কোনো point-কেই $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ আকারে লেখা যাবে। অংকটাতে একটা tangent-এর কথা বলা আছে। সুবিধার জন্য ধরে নেব যে point of tangency (স্পর্শবিন্দু)-টা আছে প্রথম quadrant-এ। (কোনো একটা quadrant-এ তো থাকবেই, আর সবগুলো quadrant-ই দেখতে একইরকম, সুতরাং প্রথম quadrant ধরে নেওয়ায় কোনো অসুবিধা নেই!)

> Let the point of tangency be $(a\cos\theta, b\sin\theta)$,
> where $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

এই যে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ লিখলাম, তার মানেই হল point-টাকে প্রথম quadrant-এ নিলাম।
এবার আমরা QR বার করব। লক্ষ কর যে θ বদলালে QR-ও বদলায়। তার মানে QR হল θ-র একটা function. এই function-টাকে বার করাই আমাদের আপাততঃ লক্ষ। তার জন্য কয়েকটা ধাপ আছে--

1. প্রথমে tangent-টার equation বার করব।
2. OQ আর OR হল এই tangent-টার দুটো intercept. সুতরাং tangent-এর equation থেকে OQ এবং OR বেরিয়ে যাবে।
3. তার পর QOR right-angled triangle (সমকোণী ত্রিভুজ)-এ Pythagoras লাগিয়ে QR বার করব।

তাহলে প্রথম কাজ হল tangent-এর equation বার করা--

> At this point the slope of the tangent is
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}.$$

Thus the equation of the tangent is

$$y - b\sin\theta = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(x - a\cos\theta).$$

এই ধাপটা অনেকের গুলিয়ে যায়। এখানে tangent-টা এমন একটা সরলরেখা যেটা $(x_0, y_0) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ বিন্দু দিয়ে যায়, এবং যার slope হল $m = -\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}$. এরকম সরলরেখার equation হয়

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

আমরা ঠিক সেটাই লিখেছি। লক্ষ কর যে আমি সব কিছুই sin আর cos-এর ভাষায় লিখেছি, কোথাও $\cot, \text{cosec}$ ইত্যাদি আনিনি। এতে সামান্য বেশী লিখতে হলেও ধাপগুলো স্পষ্ট থাকে এবং কাটাকুটি করতেও সুবিধা হয়।
এবার আমাদের কাজ হল দুটো intercept বার করা। তাই আমরা একবার $x = 0$ বসাব, তার পর $y = 0$ বসাব--

Putting $x = 0$ the y-intercept is

$$OQ = y = b\sin\theta - \frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(0 - a\cos\theta) = \cdots = \frac{b}{\sin\theta}.$$

মাঝখানে $\cdots$ লিখে মামুলী কিছু ধাপ বাদ দিয়ে গেলাম। আশা করি তুমি শূন্যস্থানটুকু পূরণ করে নিতে পারবে। একইভাবে অন্য intercept-টাও বেরোবে--

Also putting $y = 0$ the x-intercept is

$$OR = a\cos\theta - \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(0 - b\sin\theta) = \cdots = \frac{a}{\cos\theta}.$$

এবার Pythagoras লাগানোর পালা--

So

$$QR^2 = OQ^2 + OR^2 = \frac{b^2}{\sin^2\theta} + \frac{a^2}{\cos^2\theta} = f(\theta), \text{ say.}$$

আমাদের উদ্দেশ্য হল এমন θ বার করা যাতে QR হয় minimum. কিন্তু QR যদি minimum হয় তবে QR^2-ও minimum হবে। তাই আমরা QR^2-কে θ-র function হিসেবে লিখলাম। QR-এর বদলে QR^2 নিয়ে কাজ করার সুবিধা হল এই যে QR-এর ফর্মুলায় একটা মস্ত বড় square root আছে, QR^2-এর বেলায় সে ঝামেলা নেই!
এইবার তবে $f(\theta)$-কে differentiate করি--

Now

$$f'(\theta) = \frac{-2b^2\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{2a^2\sin\theta}{\cos^3\theta}.$$

আমাদের দেখতে হবে কখন $f'(\theta)$ positive, negative বা শূন্য হয়--

Now

$$
\begin{aligned}
& f'(\theta) \lesseqqgtr 0 \\
\iff \quad & \frac{-2b^2\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{2a^2\sin\theta}{\cos^3\theta} \lesseqqgtr 0 \\
\iff \quad & \frac{a^2\sin\theta}{\cos^3\theta} \lesseqqgtr \frac{b^2\cos\theta}{\sin^3\theta} \\
\iff \quad & \tan^4\theta \lesseqqgtr \tfrac{b^2}{a^2} \\
\iff \quad & \tan\theta \lesseqqgtr \sqrt{\tfrac{b}{a}} \quad [\because 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}] \\
\iff \quad & \theta \lesseqqgtr \tan^{-1}\sqrt{\tfrac{b}{a}} \quad \left[\because \tan\theta \text{ is an increasing function for } 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}.\right].
\end{aligned}
$$

Thus $f(\theta)$ attains minimum at

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}} = \theta_0, \text{ say.}$$

এবার আমাদের দেখাতে হবে $\theta = \theta_0$ হলে $QR = a + b$ হবে। আমরা অবশ্য QR^2 নিয়ে কাজ করছি, তাই দেখাব যে $QR^2 = (a+b)^2$ হবে, মানে $f(\theta_0) = (a+b)^2$ হবে। এবার আমাদের বার বার $\cos\theta_0$ আর $\sin\theta_0$ লাগবে। তাই ওগুলো বার করে রাখি।

Now

$$
\begin{aligned}
\because \tan^2\theta_0 &= \frac{b}{a} \\
\therefore \cot^2\theta_0 &= \frac{a}{b} \\
\therefore \sec^2\theta_0 &= 1 + \frac{b}{a} \\
\text{and } \operatorname{cosec}^2\theta_0 &= 1 + \frac{a}{b} \\
\therefore \cos^2\theta_0 &= 1/\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{a}{a+b} \\
\text{and } \sin^2\theta_0 &= 1/\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a+b} \\
\therefore \cos\theta_0 &= \sqrt{\frac{a}{a+b}} \\
\text{and } \sin\theta_0 &= \sqrt{\frac{b}{a+b}},
\end{aligned}
$$

Since $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

এবার $f(\theta_0)$ বার করা খুবই সোজা--

$$\begin{aligned}\therefore f(\theta_0) &= \frac{b^2}{\sin^2\theta_0} + \frac{a^2}{\cos^2\theta_0}\\ &= b^2 \times \tfrac{a+b}{b} + a^2 \times \frac{a+b}{a}\\ &= (a+b)^2.\end{aligned}$$

So the minimum value of QR is $(a+b)$, as required.

অংকটা এখনো শেষ হয় নি! আমাদের আরও দেখাতে হবে যে PQ আর PR-এর ratio হল a আর b-এর ratio-ও সমান। তার জন্য PQ আর PR বার করব। প্রথমে দেখে নিই যে $\theta = \theta_0$ হলে P, Q এবং R কি কি হয়--

Now

$$\begin{aligned}P &= (a\cos\theta_0, b\sin\theta_0) = \left(\tfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \tfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)\\ Q &= \left(0, \tfrac{b}{\sin\theta_0}\right) = (0, \sqrt{b(a+b)})\\ R &= \left(\tfrac{a}{\cos\theta_0}, 0\right) = (\sqrt{a(a+b)}, 0).\end{aligned}$$

এবার PR এবং PQ বার করি--

$$\therefore PR^2 = \left(\tfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} - \sqrt{a(a+b)}\right)^2 + \left(\tfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)^2 = \cdots = b^2.$$

and

$$\therefore PQ^2 = \left(\tfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)^2 + \left(\tfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} - \sqrt{b(a+b)}\right)^2 = \cdots = a^2.$$

So

$$PR : PQ = b : a,$$

as required.

এই অংকটা খুব জটিল ছিল না, কিন্তু বেশ লম্বা ছিল। এরকম আরেকটা অংক নীচে দিলাম।

Exercise 18: Let ℓ be a straight line, and P, Q be two points not on ℓ, and on same side of ℓ. Let R be a point moving along ℓ. Show that when $PR + RQ$ is minimum then the lines PR and RQ make equal angles with ℓ. ■

Exercise 19: Let $a_1, ..., a_n$ be any n real numbers. Find x such that

$$(x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$$

is minimum. ■

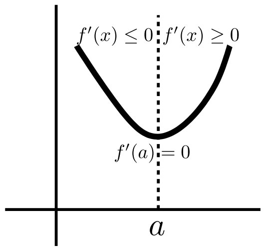


Fig 23

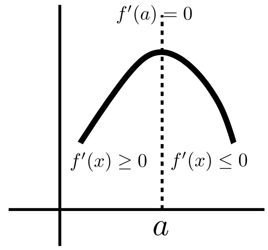


Fig 24

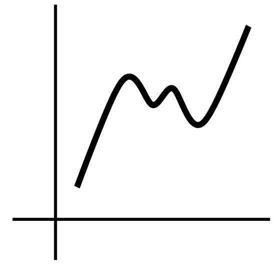


Fig 25

9.1 অন্যান্য সম্ভাবনা

আমরা এতক্ষণ যে সব উদাহরণ দেখলাম সেগুলোর গ্রাফ আঁকলে হয় Fig 23 নয় Fig 24-এর মত। সবসময়েই x-এর কোনো একটা value a-তে $f'(a) = 0$ এবং হয়

$$f('x) \lesseqgtr 0 \text{ according as } x \lesseqgtr a$$

নয়

$$f('x) \lesseqgtr 0 \text{ according as } x \gtreqless a.$$

কিন্তু সব সময়েই যে এমনটা হবে তার কোনো কথা নেই, গ্রাফটা Fig 25-এর মত ঢেউ খেলানো হতে পারে। এরকম কয়েকটা সম্ভাবনার কথা জেনে রাখা ভালো।

Example 2: ধরো $f(x)$-এর domain একটা closed, bounded interval $[a, b]$, এবং $f(x)$ হল একটা continuous function. আমরা প্রথম খণ্ডে শিখেছি যে এরকম $f(x)$-এর global maximum এবং global minimum দুটোই থাকে। এক্ষেত্রে তোমাকে local extremum থাকতে পারে খালি এইসব জায়গায়--

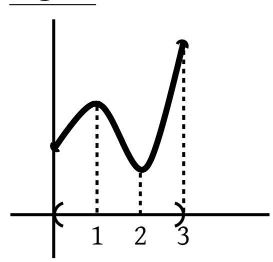
- যেখানে $f(x)$-টা differentiable এবং $f'(x) = 0$,
- যেখানে $f(x)$-টা differentiable নয়,
- দুই প্রান্তে, মানে $x = a$ আর $x = b$-তে।

Fig 26 দ্যাখো। সুতরাং global extremum-এর জন্য অনুসন্ধানও চালাতে হবে এদের মধ্যেই। এদের মধ্যে যে খানে $f(x)$ সবচেয়ে বেশী সেটাই হবে $f(x)$-এর global maximum, আর যেখানে সবচেয়ে ছোটো সেটাই হবে global minimum. ■

Fig 26



Fig 27



যদি $f(x)$-এর domain-টা একটা closed, bounded interval না হয়, তবে $f(x)$ যতই differentiable হোক না কেন, তার global extremum থাকার কোনো নিশ্চয়তা নেই। নীচের উদাহরণটা দেখলেই সেটা বুঝবে--

Example 3: ধরো $f : (0,1) \to \mathbb{R}$-এর গ্রাফটা হল Fig 27-এর মত। এর কি কোনো local maximum আছে? কোনো global maximum-ও কি আছে?

SOLUTION: একটা local maximum আছে, $x = 1$-এ। কিন্তু কোনো global maximum নেই, কারণ $x = 3$-এর দিকের প্রান্তটা অনেকটা উপরে উঠে আছে। এদিকে $x = 3$-তে যে global maximum আছে এমনও বলা যাচ্ছে না, কারণ $x = 3$ তো domain-এর বাইরে! ■

Exercise 20: আবার Fig 27 দ্যাখো। এখানে local minimum আছে? আর global minimum? ■

DAY 10
Continuity of derivative

কোনো function $f(x)$ যদি differentiable হয় তবে তাকে differentiate করলে একটা নতুন function পাওয়া যায়, $f'(x)$. যেহেতু $f(x)$-কে differentiable বলেই দিয়েছি, তাই $f(x)$ তো continuous-ও হতে বাধ্য। কিন্তু প্রশ্ন হল $f'(x)$-ও কি continuous হতে বাধ্য? উত্তর হল--না, এমন $f(x)$ সম্ভব, যাতে $f'(x)$ সর্বত্র exist করে কিন্তু $f'(x)$ মোটেই continuous নয়! যদি কোনো $f(x)$ এমন হয় যে $f'(x)$-ও continuous, তবে সেই রকম $f(x)$-কে বলি **continuously differentiable.** একইভাবে আসে নীচের সংজ্ঞাটা--

DEFINITION: **Continuously differentiable**

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be any interval, and n be any positive integer. If $f(x)$ is a function such that $f^{(n)}(x)$ is continuous on I, then we say that $f(x)$ is **n-times continuously differentiable** on I.

আমরা অধিকাংশ সময়েই যে সব differentiable function নিয়ে কাজ করি, তারা মোটামুটিভাবে সবাই হল continuously differentiable, যেমন $\sin x$-কে differentiate করলে $\cos x$ হয়, সেটাও continuous. এবার একটা function-এর উদাহরণ দেখি যেটা differentiable, কিন্তু continuously differentiable নয়।

Exercise 21: If

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

then show that f is differentiable everywhere but f' is not continuous at $x = 0$.[4] ■

HINT:
প্রথম কাজ হল এটা দেখানো যে $f'(x)$ সর্বত্র exist করে। যদি $x \neq 0$ হয় তবে তো হায়ার সেকণ্ডারীর মত করে differentiate করেই হয়ে যায়--

If $x \neq 0$ then
$$f(x) = x^2 \sin \tfrac{1}{x},$$
which can be differentiated by the product rule to give
$$f'(x) = 2x \sin \tfrac{1}{x} + x^2 \cos \tfrac{1}{x} \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x}.$$

কিন্তু $x = 0$-তে $f(x)$-টা অন্যভাবে বলা আছে, তাই $f'(0)$ বার করার জন্য limit ব্যবহার করা ছাড়া পথ নেই।

At $x = 0$, we are to check if
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ exists.}$$
Now, for $h \neq 0$,
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = h \sin \tfrac{1}{h}.$$

এইটার limit যে 0 হয়, সেটা আশা করি বুঝতে খুব অসুবিধা হচ্ছে না--

But
$$\lim_{h \to 0} h \sin \tfrac{1}{h} = 0.$$
⟦ Because:

$0 \leq |h \sin \frac{1}{h}| \leq |h| \to 0$ as $h \to 0$.

⟧

So $f'(0)$ exists and equals 0.

তার মানে $f'(x)$-টা সব x-এই exist করে--

Thus
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

এইবার দেখাব যে $f'(x)$-টা সর্বত্র exist করলেও $x = 0$-তে continuous নয়।

To show that f' is not continuous at $x = 0$, *i.e.*,
$$f'(x) \not\to f(0) = 0 \text{ as } x \to 0.$$

তার মানে দেখাতে হবে যে $x \to 0$ হলেও
$$2x \sin \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x} \not\to 0.$$
এর মধ্যে $2x \sin \frac{1}{x}$ অংশটা নিয়ে ঝামেলা নেই, এক্ষুণি দেখালাম যে ওটা 0-তে যায়। কিন্তু সমস্যা হল $\cos \frac{1}{x}$-টাকে নিয়ে। এটার limit মোটেই exist করে না। কেন করে না সেটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে আলোচনা করেছিলাম, নীচে আরেকবার সেটা মনে করিয়ে দিই--

Now we have seen already that $x\sin\frac{1}{x}\to 0$ as $x\to 0$.
But $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ does not exist.

⟦ Because:
If we take $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ and $x'_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ for $n\in\mathbb{N}$, then
$x_n, x'_n\to 0$ but $\cos x_n\to 1$ while $\cos x'_n\to -1$.
⟧

So $\lim_{x\to 0} f'(x)$ does not exist.
Hence $f'(x)$ is not continuous at $x=0$.

এই অংকটাকে আরেকবার ভালো করে লক্ষ কর। এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে discontinuity হয় এই কয় রকমের--

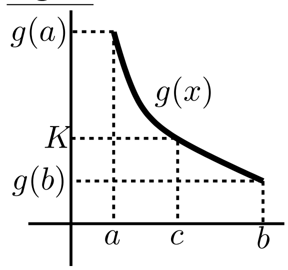
- Type 1:
  - removable discontinuity
  - jump discontinuity
- Type 2:
  - infinite discontinuity
  - essential discontinuity

এখানে $f'(x)$-এর discontinuity-টা হল একটা essential discontinuity. মজার কথা হল সব সময়েই ঠিক এমনটাই হতে বাধ্য, মানে যদি $f(x)$ কোনো differentiable function হয় যাতে $f'(x)$-টা কোথাও discontinuous হয়, তবে সেটা removable, jump বা infinite discontinuity হতে পারে না। এই জিনিসটা প্রমাণ করার জন্য আমরা একটা theorem প্রমাণ করব, যার নাম Darboux's theorem.

10.1 Darboux's theorem

Darboux's theorem-এর বক্তব্য বেশ অদ্ভুত--ধরো $f(x)$ একটা যেকোনো differentiable function. আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে, $f'(x)$ continuous নাও হতে পারে। কিন্তু তাহলেও $f'(x)$-এর মধ্যে continuous function-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য থাকবেই, সেটা হল intermediate value property. এইটাই হল Darboux's theorem.
আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে intermediate value property-র সঙ্গে পরিচিত হয়েছিলাম, হয়তো সেই স্মৃতি এতদিনে ফিকে হয়ে এসেছে। তাই স্মৃতিটাকে একটু ঝালিয়ে নেওয়া যাক। Fig 28 দ্যাখো। ধরো $g(x)$ কোনো continuous function,

Fig 28



আর $a < b$ দুটো সংখ্যা। যদি তোমাকে $g(a)$ থেকে $g(b)$-র মধ্যে কোনো সংখ্যা K দিই, তবে $g(x)$-এর গ্রাফটা (a, b)-র মধ্যে কোথাও না কোথাও K দিয়ে টানা horizontal লাইনটাকে ছেদ করতে বাধ্য। মানে

$$\exists c \in (a, b) \quad g(c) = K.$$

এই একই গুণ যেকোনো $f'(x)$-এরও থাকতে বাধ্য, এমন কি সে $f'(x)$ যদি discontinuous-ও হয়, তাও!

Exercise 22: State and prove Darboux theorem on derivative.[5] ■

HINT:

> **Darboux theorem**
>
> Let f be derivable in a closed and bounded interval $[a, b]$. Let K be any number between $f'(a)$ and $f'(b)$. Then
>
> $$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = K.$$

প্রমাণটা জটিল কিছু নয়, প্রায় Rolle's theorem-এর প্রমাণেরই মত। খালি একটা বাড়তি প্যাঁচ আছে।

> Proof: W.l.g. we assume $f'(a) < K < f'(b)$.

এটা কেন লিখে নিলাম? বলা ছিল যে K আছে $f'(a)$ আর $f'(b)$-র মাঝখানে কোথাও। তার মানে হয় $f'(a) < K < f'(b)$ আর নয়তো $f'(a) < K < f'(b)$. যেটাই হোক প্রমাণের মূল যুক্তি একইরকম থাকবে। তাই যে কোনো একটা ধরে কাজ করলেই হবে। আমরা ধরে নিলাম $f'(a) < K < f'(b)$. এতে কোনো কিছু বাদ গেল না, তাই লিখেছি w.l.g. অর্থাৎ "without loss of generality."

> Consider the function
>
> $$g(x) = f(x) - Kx.$$
>
> g is derivable and hence continuous on $[a, b]$.

লক্ষ কর যে $g'(x) = f'(x) - K$, তাই যদি দেখাতে পারি যে $\exists c \in (a, b) \quad g'(c) = 0$ তবেই আমাদের কাজ হাসিল হবে।

Fig 29

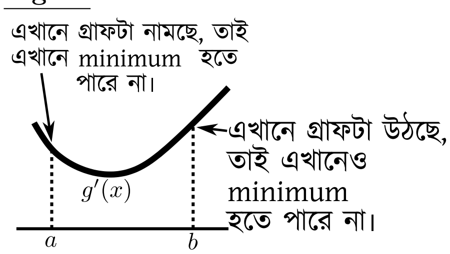
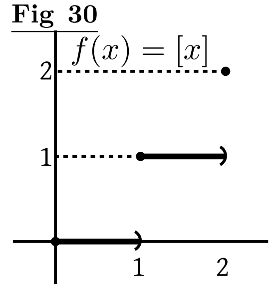


Fig 30



> Since $[a, b]$ is closed and bounded, so g must attain its minimum at some $c \in [a, b]$.

এইবার আমরা দাবী করতে চলেছি যে $c = a$ বা $c = b$ হতে পারে না। মানে c-টা $[a, b]$ দুই প্রান্তে থাকতে পারে না, মাঝখানে থাকতে বাধ্য। সেটা দেখাতে পারলেই আমরা অমনি Fermat's theorem লাগিয়ে বলতে পারব যে $g'(c) = 0$.

> But this minimum cannot be at a, since $g'(a) = f'(a) - K < 0$.

এইটা কেন হল বুঝলে? একটা ছোটো প্যাঁচ আছে। Fig 29 দ্যাখো। যেহেতু $g'(a) < 0$ তাই $x = a$-তে $g(x)$ হল decreasing. তাই a-র থেকে একটু বড় কোনো x নিলে $g(x) < g(a)$ হবে। তাই $g(a)$ মোটেই minimum হতে পারে না। একই রকম যুক্তি $x = b$-তেও খাটে--

> Similarly, the minimum cannot be at b, since $g'(b) = f'(b) - K > 0$.
>
> So the minimum must be attained at some $c \in (a, b)$.
>
> Hence by Fermat's theorem, $g'(c) = 0$, *i.e.*, $f'(c) = K$, as required.

Exercise 23: If f is derivable on a closed interval $[a, b]$ and if $f'(a) < K < f'(b)$ then show that there exists at least one point $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = K$ where K is a real number.[4] ■

HINT:
আগের অংকের প্রমাণটাই আবার দিয়েছে।

Exercise 24: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be differentiable on $[a, b]$ and $f'(a) < f'(b)$. If $f'(a) < K < f'(b)$, prove that there exists $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = K$.[5] ■

HINT:
একই জিনিস সামান্য অন্য ভাষায়।

Exercise 25: Let f be derivable in a closed and bounded interval $[a, b]$ and $f'(a) \neq f'(b)$. If K is any number lying between $f'(a)$ and $f'(b)$, show that there exists at least one point $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = K$.[5] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

Exercise 26: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be differentiable on $[a, b]$ and $f'(a) < f'(b)$. Prove that $f'(x)$ assumes every value between $f'(a)$ and $f'(b)$.[5] ■

HINT:
আবার একই অংক।

Exercise 27: Show that the function f defined by $f(x) = [x]$ in $[0, 2]$ is not the derivative of any function.[1] ■

HINT:
গ্রাফটা এঁকেছি Fig 30-এ।

> The function $f(x)$ does not have the intermediate value property:
> $f(0) = [0] = 0$ and $f(1) = [1] = 1$, but there is no $\xi \in (0,1)$ such that $f(\xi) = \frac{1}{2} \in (0,1)$.
> By Darboux's theorem, any differentiable function must satisfy intermediate value property. So $f(x)$ cannot be the derivative of any function.

Exercise 28: Prove or disprove: The function $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

is derivative of a function defined on $[-1,1]$.[2] ■

HINT:
একেবারেই আগের অংকটার মতই। গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 31-এ।

Exercise 29: Let the real-valued function f be derivable on the closed interval $[a,b]$ and let $f'(a) \neq f'(b)$. If k is any number lying between $f'(a)$ and $f'(b)$, show that there exists at least one point c in (a,b) such that $f'(c) = k$. If in particular, f' is monotone in (a,b) show that the f' is continuous in (a,b).[4+2] ■

HINT:
প্রথম অংশটা তো আগের অংকটাই আবার। খালি দ্বিতীয় অংশটা করি--

> Second part: W.l.g., let $f'(x)$ be nondecreasing.

বলে দেয় নি যে monotone-টা কিরকম, উঠছে না নামছে, তাই একটা কিছু ধরে নিলাম। অবশ্যই nonincreasing ধরলেও মূল যুক্তি একই থাকত, তাই w.l.g. (without loss of generality) লিখে দিয়েছি।
আমরা এখানে proof by contradiction করব, তাই--

> Let, if possible, $f'(x)$ be discontinuous at some $x = c \in (a,b)$.

এইবার আসল জিনিসটা--যেহেতু $f'(x)$ একটা monotone function, তাই এখানে discontinuity খালি একরকমেরই হতে পারে--jump discontinuity. এটা ছবি দেখে বোঝা যায় সহজেই (Fig 32)। আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে এটা প্রমাণও করেছিলাম। এখানে আর নতুন করে প্রমাণ করার দরকার নেই।

Fig 31

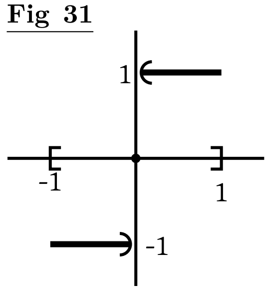
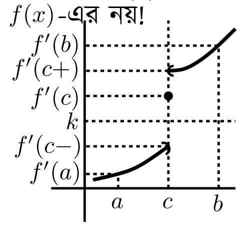


Fig 32
এটা কিন্তু $f'(x)$-এর গ্রাফ, $f(x)$-এর নয়!



∵ $f'(x)$ is monotone,

∴ the discontinuity must be a jump discontinuity, ie,

$$f'(c-) < f'(c+).$$

তার মানে $f'(c-)$ থেকে $f'(c+)$-এর মধ্যে $f'(x)$-এর গ্রাফে একটা ফাঁক আছে। Fig 32 দ্যাখো। এই ফাঁকের মধ্যে গ্রাফের উপর খালি একটাই point আছে-- $f'(c)$. আমরা এই $f'(c)$-কে এড়িয়ে ফাঁকটার মধ্যে যে কোনো একটা সংখ্যা নেব k.

Choose $k \in (f'(c-), f'(c+))$ with $k \neq f'(c)$.

যেহেতু ফাঁকের মধ্যে নিয়েছি তাই এমন কোনো $x \in (a, b)$ পাব না যাতে $f'(x) = k$ হয়, তার মানে $f'(x)$-এর intermediate value property থাকছে না। এবং Darboux's theorem অনুযায়ী সেটা অসম্ভব!

Then

$$f'(a) \leq f'(c-) < k < f'(c+) \leq f'(b).$$

But $\nexists x \in (a, b)$ such that $f'(x) = k$.

So $f'(x)$ does not satisfy Darboux's theorem $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

10.2 $f'(x)$-এর discontinuity

ধরো $f(x)$ একটা এমন differentiable function, যাতে $f'(x)$-টা discontinuous. এবার Darboux theorem ব্যবহার করে দেখব $f'(x)$-এ ঠিক কি রকম discontinuity থাকতে পারে। আমরা জানি যে $f'(x)$-এর intermediate value property আছে। একদিকে discontinuous অন্যদিকে intermediate value property--হঠাৎ শুনলে পরস্পরবিরোধী মনে হয়। প্রশ্ন হল তাহলে $f'(x)$ দেখতে কি রকম হবে? এমন কি কি discontinuous function সম্ভব যাদের intermediate value property আছে? এবার তা নিয়ে আলোচনা করব।

10.2.1 Type I

একটু ছবি এঁকে ভাবা যাক। Fig 33-এ একটা discontinuous function-এর গ্রাফ রয়েছে। এর কি intermediate value property আছে? দেখাই যাচ্ছে নেই, কারণ যেভাবে a, b আর K নিয়েছি, তাতে এমন কোনো $c \in (a, b)$ পাব না যাতে $g(c) = K$ হয়। সুতরাং বলতে পারি যে, এই $g(x)$-টা কোনো function-এর derivative হতে পারে না।

Exercise 30: উপযুক্ত a, b আর k নিয়ে দেখাও যে Fig 34-এর function-টারও intermediate value property নেই। ■

Example 4: Fig 35-এর গ্রাফটা দেখলেই বুঝবে যে এখানেও intermediate value property নেই। ■

Fig 33

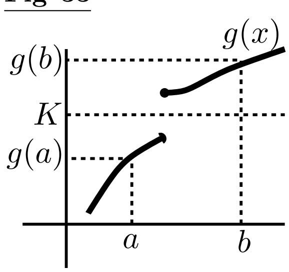


Fig 34

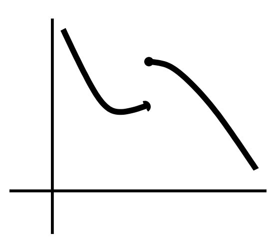
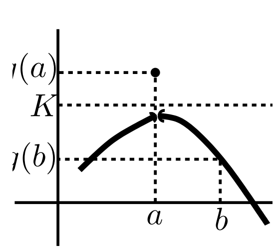


Fig 35



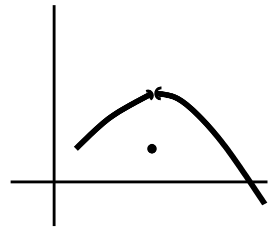


Fig 36

Exercise 31: Fig 36-এর function-টার কি intermediate value property আছে? ■

তার মানে লক্ষ কর যে, কোনো function-এর যদি removable discontinuity থাকে, তবে তার intermediate value property থাকতে পারে না। সুতরাং বলতে পারি যে, $f(x)$ কোনো differentiable function হলে $f'(x)$-এর কোনো removable discontinuity থাকতে পারে না। এই কথাটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 32: If f is differentiable in (a,b) and at a point $c \in (a,b)$ $\lim_{x\to c} f'(x) = \ell$ exists, then show that f' is continuous at c.[5] ■

HINT:
এই অংকটা অবশ্যই Darboux's theorem দিয়ে করা যায়, কিন্তু Lagrange's mean value theorem দিয়ে আরও সহজে হয়। আমরা সেভাবেই করলাম--

Enough to show that $f'(c) = \ell$, *i.e.*,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \ell,$$

i.e.,
Target $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall h \in N'(0,\delta) \quad |[|\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - \ell|]| < \epsilon.$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.
$\because \lim_{x\to c} f'(x) = \ell$,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(c,\delta) \quad |f'(x) - \ell| < \epsilon.$$

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this $\delta > 0$.

$\boxed{\forall h}$ Take any $h \in N'(0,\delta)$.

Then by Lagrange's mean value theorem, we have

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(\xi)$$

> for some ξ between c and $c+h$. So
> $$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-l\right| = |f'(\xi)-\ell| < \epsilon,$$
> as required.

এবার আমরা দেখব যে শুধু removable discontinuity-ই নয়, একটা function-এর jump discontinuity থাকলেও তার intermediate value property থাকতে পারে না। সুতরাং বলতে পারি যে, $f(x)$ কোনো differentiable function হলে $f'(x)$-এর কোনো removable বা jump discontinuity থাকতে পারে না, মানে কোনো type 1 discontinuity-ই থাকতে পারে না। নীচের অংকটার ঠিক এটাই বক্তব্য।

Exercise 33: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a differentiable function on $[a,b]$. Show that f' cannot have any discontinuity of the first kind.[4] ■

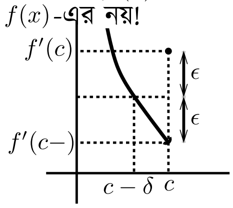
HINT:

দেখাতে হবে যে discontinuity of the first kind থাকতে পারে না, মানে removable বা jump discontinuity কোনোটাই থাকতে পারে না। কিন্তু দুটোকে আলাদা করে দেখাতে গেলে উত্তরটা খামোখা লম্বা হয়ে যাবে। আমরা এক ঢিলে দুই পাখী মারব। যদি $x=c$-তে $f'(x)$-এর কোনো discontinuity of the first kind থাকে তবে $f'(c-), f'(c)$ আর $f'(c+)$ এই তিনটে সংখ্যা সবাই সমান হতে পারে না। ফলে হয় $f'(c-)\neq f'(c)$ নয় তো $f'(c)\neq f'(c+)$ হতে বাধ্য। এই দুই ক্ষেত্রেই ঠিক একই যুক্তি খাটবে, তাই যে কোনো একটা দিক করলেই হবে। আমরা খালি "$f'(c-)\neq f'(c)$" অংশটা করব। এর মধ্যেও দুটো কেস আছে--$f'(c-)<f'(c)$ আর $f'(c-)>f'(c)$. এই দুটোর ক্ষেত্রেও মূল যুক্তি একই থাকবে। তাই এদের মধ্যে যে কোনো একটা করলেই হবে। আমরা $f'(c-)<f'(c)$ অংশটা করব। এই ভাবে যে আমরা অংকটাকে সহজ করে নিলাম, সেটা অংকের গোড়াতেই লিখে নেব, without loss of generality (wlg) বলে--

> Let, if possible, $f'(x)$ have a discontinuity of the first kind at $x=c$.
> Then either $f'(c)\neq f'(c-)$ or $f'(c)\neq f'(c+)$.
> Let, wlg, $f'(c-)\neq f'(c)$, say $f'(c-)<f'(c)$.

এইবার আসল অংকের শুরু। আমরা proof by contradiction করছি, আমাদের উদ্দেশ্য হল Darboux's theorem-এর সঙ্গে contradiction বাঁধানো। অর্থাৎ আমরা দেখাব যে $f'(x)$-এর intermediate value property নেই। তার কায়দাটা হল $f'(x)$-এর গ্রাফে একটা ফাঁক বার করা, এবং ফাঁকের মধ্য দিয়ে একটা horizontal লাইন চালিয়ে দেওয়া। ঠিক এই কাজটাই আমরা নীচে করব। Fig 37-এর দিকে চোখ রেখো, খালি ফর্মুলাগুলো দেখলে মাথা গুলিয়ে যাবে।
এখানে $f'(c)$ আর $f'(c-)$-এর মধ্যে যে ফাঁকটা রয়েছে, সেটাই আমাদের তুরুপের তাস। এটাকে মনে মনে দুটো সমান ভাগে ভাগ করে নাও, প্রতিটা অর্ধেকের দৈর্ঘ্যকে বল ϵ.

Fig 37
এটা কিন্তু $f'(x)$-এর গ্রাফ, $f(x)$-এর নয়!



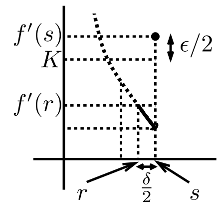


Fig 38

Let $\epsilon = \frac{1}{2}(f'(c) - f'(c-)) > 0$.

এর পরের ধাপটা সরাসরি $f'(c-)$-এর সংজ্ঞা থেকে পাচ্ছি--

Then
$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c) \quad |f'(x) - f'(c-)| < \epsilon.$$

মনে রেখো যে intermediate value property নেই দেখাতে হলে তিনটে জিনিস লাগে, যাদেরকে আমরা আগের অংকগুলোতে a, b আর K নাম দিয়ে এসেছি। এদের মধ্যে a থাকে ফাঁকটার বাঁদিকে, b থাকে ডানদিকে, আর K দিয়ে টানা horizontal লাইনটা ফাঁকের মধ্য দিয়ে গলে যায়। এই অংকে আবার a আর b অক্ষরদুটো ব্যবহার করে ফেলেছে। তাই আমরা ওদের বদলে r এবং s নাম ব্যবহার করব। Fig 38 দেখে খুব ভালো করে বুঝে নাও আমরা কিভাবে r, s এবং K নির্বাচন করছি--

Consider $r = c - \frac{\delta}{2}$ and $s = c$.
Let $K = f'(c) - \frac{\epsilon}{2}$.

এবার আমাদের মাথাব্যথা খালি গ্রাফটার যেটুকু অংশ $[r, s]$-এর উপরে আছে সেটুকু নিয়ে। Fig 38-এ তাই গ্রাফের বাকী অংশ ড্যাশ্ড্যাশ্ দিয়ে এঁকেছি। বুঝতেই পারছ intermediate value property কেন থাকবে না। সেটাকে গুছিয়ে লিখি।

Then K is between $f'(r)$ and $f'(s)$, but
$$\nexists x \in (r, s) \quad f'(x) = K.$$

⟦ <u>Because:</u>

If $x \in (r, s) \subseteq (c-\delta, c)$
then $f'(x) < f'(c-) + \epsilon = f'(c) - \epsilon < K$.

⟧

So $f'(x)$ contradicts Darboux's theorem $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

10.2.2 Type II

আমরা দেখলাম যে, $f'(x)$-এর কোনো type 1 discontinuity থাকা অসম্ভব। তার মানে যাবতীয় discontinuity-ই হতে হবে type 2. আমরা জানি যে type 2 discontinuity হয় দু'রকমের--infinite discontinuity আর essential discontinuity. দেখা যাক $f'(x)$-এর বেলায় এই দুই ধরণের discontinuity-ই সম্ভব কিনা। প্রথমে ছবি দিয়ে ভাবি।

Example 5: Fig 39-এ একটা infinite discontinuity-ওয়ালা function-এর গ্রাফ রয়েছে। এর কি intermediate

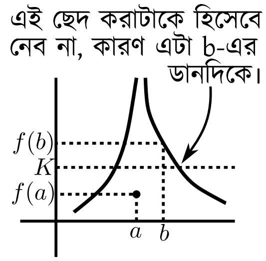


Fig 39

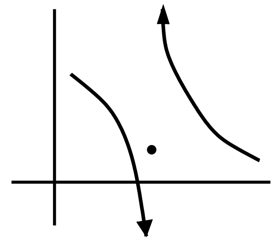


Fig 40

value property আছে?

SOLUTION: না। কারণটা বুঝবে ছবির মত করে a, b, k নিলেই। ■

এই উদাহরণের ছবিটা যদি ভালো করে বুঝে থাকো, তবে নীচের দুটো অংক মোটেই কঠিন লাগা উচিত নয়।

Exercise 34: দেখাও যে Fig 40-এর function-টার intermediate value property নেই। ■

Exercise 35: If $f(x)$ has an infinite discontinuity at $x = a$ then show that $f(x)$ cannot have intermediate value property. ■

এইটার সঙ্গে Darboux theorem জুড়ে দাও, তাহলেই নীচের অংকের সমাধানটা পাবে--

Exercise 36: If $f(x)$ is any differentiable function, then show that $f'(x)$ cannot have any infinite discontinuity. ■

সব মিলিয়ে কি পেলাম? যদি $f(x)$ একটা যে কোনো differentiable function হয়, তবে $f'(x)$ অবশ্যই discontinuous হতে পারে, কিন্তু $f'(x)$-এর মধ্যে কোনো jump discontinuity, removable discontinuity বা infinite discontinuity থাকতে পারে না। তার মানে যদি কোনো discontinuity থাকে, তবে সেটা essential discontinuity হতে বাধ্য! এই কথাটা গুছিয়ে লিখলেই পাবে নীচের অংকটার সমাধান।

Exercise 37: If $f(x)$ is any differentiable function, then show that $f'(x)$ can have only essential discontinuity. ■

Answers

1. **(1)** $x = 0$-তে global minimum. **(2)** global maximum বা minimum নেই। **8.** No.
13. $x = 10, y = 5$ **14.** $x = 10, y = 10$. **19.** $x = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. **20.** দুটোই আছে। **30.** **31.** না।
34.

Chapter III
Differentiation (part 3)

DAY 11
Taylor & Maclaurin (finite)

11.1 Taylor & Maclaurin polynomial

একটা অদ্ভুত প্রশ্ন দিয়ে শুরু করি--এমন একটা $f(x)$ দিতে পারো যাতে $f(0) = 10, f'(0) = 5$ এবং $f''(0) = -23$ হয়? হঠাৎ এরকম একটা বেখাপ্পা প্রশ্ন শুনলে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। কিন্তু একটা ছোট্টো কৌশল জানা থাকলে এরকম $f(x)$ খুবই সহজে বার করা যায়। কৌশলটা হল $f(x)$-কে এইরকম নেওয়া--

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

এরকম function-কে বলে polynomial. এই polynomial-টায় তিনটে term আছে--a, bx আর cx^2. আমাদের তিনটে শর্ত থেকে এই তিনটে অজানা সংখ্যা a, b আর c বার করা যায় এইভাবে--

$$\begin{aligned} f(x) = a + bx + cx^2 &\implies f(0) = a = 10 \\ f'(x) = b + 2cx &\implies f'(0) = b = 5 \\ f''(x) = 2c &\implies f''(0) = 2c = -23. \end{aligned}$$

তার মানে আমাদের উত্তর হল--

$$f(x) = 10 + 5x - \tfrac{23}{2}x^2.$$

বুঝতেই পারছ যে এখানে $10, 5,$ আর -23-র কোনো আলাদা গুরুত্ব নেই। ওদের জায়গায় অন্য যেকোনো সংখ্যা দিলেও একইভাবে করা যেত। এই অংকে খালি $f''(0)$ পর্যন্ত দেওয়া ছিল। চাইলে আরো বেশী দূর অবধিও দেওয়া যেত, খালি তার জন্য polynomial-টাকে আরো লম্বা নিতে হত, যেমন $f^{(5)}(0)$ অবধি গেলে (তার মানে $f(0), f'(0), ..., f^{(5)}(0)$ এই 6-টাই যদি বলা থাকে), আমরা $f(x)$ নিতাম একটা 6-খানা term-ওয়ালা polynomial–

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5.$$

নীচের অংকে পুরো general case-টা দেওয়া আছে।

Exercise 1: ধরো $d_0, d_1, ..., d_n$ হল যেকোনো $n+1$-খানা সংখ্যা। তাহলে দেখাও যে যদি

$$p(x) = d_0 + \frac{d_1}{1!}x + \frac{d_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{d_n}{n!}x^n$$

নিই তবে

$$p(0) = d_0, \quad p'(0) = d_1,, \quad \ldots, p^{(n)}(0) = d_n$$

হবে। ■

এই অংকটারই সামান্য জটিল সংস্করণ হল পরের অংকটা। প্রথম কয়েকটা ধাপ করলেই মিলটা বুঝতে পারবে।

Exercise 2: আগের মতই $d_0, d_1, ..., d_n$ হল যেকোনো $n+1$-খানা সংখ্যা। এবার এমন একটা polynomial $p(x)$ চাই যাতে

$$p(a) = d_0, \quad p'(a) = d_1, \quad \ldots, p^{(n)}(a) = d_n$$

হয়, যেখানে a হল কোনো একটা সংখ্যা যেটা দেওয়া আছে। দেখাও যে

$$p(x) = d_0 + \frac{d_1}{1!}(x-a) + \frac{d_2}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{d_n}{n!}(x-a)^n$$

নিলেই কাজ চলবে। ■

এবার মনে করো তোমাকে একটা বেশ জটিল কিছু একটা function $f(x)$ দিলাম। দিয়ে বললাম যে এমন একটা polynomial $p(x)$ বার কর যাতে

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

হয়, মানে $x = 0$-তে $f(x)$ আর $p(x)$-এর এতই মিল থাকে যে সেখানে শুধু দুজনের value-ই সমান নয়, প্রথম n-খানা derivative-ও সমান হয়। আগের অংকটা ব্যবহার করে তুমি তৎক্ষণাৎ উত্তর লিখে দেবে--

$$p(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

এ থেকেই নীচের সংজ্ঞাটার জন্ম।

DEFINITION: Maclaurin polynomial

Let $f(x)$ be any function that is n-times differentiable at $x = 0$. Then its <u>n-th</u> <u>Maclaurin polynomial</u> is defined as

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Example 1: $f(x) = \sin x$-এর n-th Maclaurin polynomial বার কর যেখানে $n = 0, 1, 2$.

SOLUTION: যখন $n = 0$, তখন n-th Maclaurin polynomial হল

$$p_0(x) = f(0) = \sin 0 = 0.$$

যদি $n = 1$ নিই, তবে polynomial-টা হবে

$$p_1(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x = \sin 0 + \cos 0 \times x = x.$$

আরেক ধাপ এগিয়ে $n = 2$ নিলে

$$p_2(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} = \sin 0 + \cos 0 \times x - \sin 0 \times \frac{x^2}{2!} = x.$$

লক্ষ কর যে $p_2(x)$-এর degree কিন্তু মোটেই 2, নয়, ওর degree হল 1. একইভাবে n-th Maclaurin polynomial-এর degree যে n হবেই, এমন কোনো কথা নেই, কিন্তু n-এর থেকে বেশী degree হতে পারে না। ■

এখানে পুরো কাজটাই হল $x = 0$-তে। যদি তার জায়গায় $x = a$-তে কাজ করতাম (যেখানে a হল কোনো একটা সংখ্যা যেটা দেওয়া আছে) তবে পেতাম এই Taylor polynomial–

> DEFINITION: **Taylor polynomial**
>
> Let a be some number, and let $f(x)$ be any function that is n-times differentiable at $x = a$. Then its <u>n-th Taylor polynomial at a</u> is defined as
>
> $$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

এটা এমন একটা polynomial যাতে

$$p_n(a) = f(a), \quad p_n'(a) = f'(a), \quad \ldots, p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

হয়। লক্ষ কর যে $a = 0$ নিলে Taylor polynomial-টা Maclaurin polynomial-এ পরিণত হয়।

Example 2: $f(x) = \sqrt{x}$-এর 2nd Taylor polynomial around $a = 3$ বার কর।

SOLUTION: উত্তর হল

$$p_2(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + f''(3)\frac{(x-3)^2}{2!},$$

এখন

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}.$$

তাই

$$f(3) = \sqrt{3}, \quad f^{(1)}(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad f^{(2)}(3) = -\frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

তার মানে

$$p_2(x) = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) - \frac{1}{24\sqrt{3}}(x-3)^2.$$

■

Exercise 3: $f(x) = e^x$-এর n-th Maclaurin polynomial বার কর, যেখানে $n = 0, 1, 2, 3$ কোনো প্যাটার্ণ লক্ষ করছ? সেই প্যাটার্ণটা ব্যবহার করে চট্ করে বলতে পারো $n = 100$ নিলে Maclaurin polynomial-টা কি হত? ■

Exercise 4: ঠিক উপরের অংকটাই আবার কর $f(x) = \cos x$ নিয়ে। ■

Exercise 5: যদি $f(x) = 1 + x + x^2$ নিই তবে এর 3-rd Taylor polynomial around 2 কত হবে? আর যদি $n = 100$ নিই তবেই বা n-th Taylor polynomial around 2 কত হবে? ■

এর পরের অংকটা একটু কঠিন, কিন্তু মজার। না পারলে ঘাবড়ে যেও না, এটা এ বইতে পরে কোথাও লাগবে না, তাই স্বচ্ছন্দে বাদ দিয়ে যেতে পারো।

Exercise 6: ধরো

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

দেখাও যে তুমি যাই n নাও না কেন সব সময়েই n-th Maclaurin polynomial হবে $p_n(x) \equiv 0$. প্রথমে $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ সরাসরি differentiate করে বার করে দ্যাখো যে 0 আসছে। তার পর বুক ঠুকে $p_n(x)$-কে 0 দেখানোর চেষ্টা কর। ■

11.2 Taylor & Maclaurin theorems

ধরো $p_n(x)$ হল $f(x)$-এর n-th Maclaurin polynomial, মানে

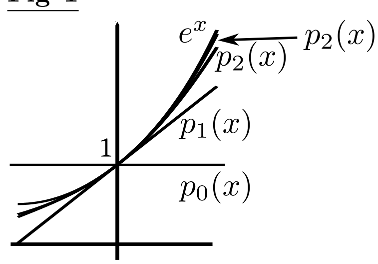
$$\begin{aligned} p_0(x) &\equiv f(0) \\ p_1(x) &\equiv f(0) + f'(0)x \\ p_2(x) &\equiv f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2, \text{ ইত্যাদি।} \end{aligned}$$

তবে আন্দাজ করতে পারছ যে, n যতই বাড়ছে $p_n(x)$-এর সঙ্গে $f(x)$-এর মিল ততই বাড়ছে। এই ব্যাপারটা গ্রাফ আঁকলে চমৎকার বোঝা যায়। **Example 3:** যদি $f(x) = e^x$ নিই তবে তার প্রথম চারটে Maclaurin polynomial হয়

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= 1 + x \\ p_2(x) &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} \\ p_3(x) &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!}. \end{aligned}$$

Fig 1-এ $f(x) = e^x$-এর গ্রাফ আর এই চারজনের গ্রাফ একসাথে এঁকেছি। লক্ষ কর $p_3(x)$-কে e^x-এর থেকে আলাদা করাই মুস্কিল, এত প্রচণ্ড মিল! ■

Fig 1



ঠিক কতটা মিল হবে সেইটা নিয়ে একটা গুরুত্বপূর্ণ theorem আছে। Theorem-টাকে Taylor polynomial দিয়েও লেখা যায়, বা $a = 0$ নিলে Maclaurin polynomial দিয়েও লেখা যায়। প্রথম ক্ষেত্রে নাম হল Taylor theorem, আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে Maclaurin theorem.

ধরো $f(x)$-এর n-th Taylor polynomial around a হল $p_n(x)$. আমরা $f(x)$ আর $p_n(x)$-এর পার্থক্যটাকে $R_n(x)$ নাম দেব, মানে

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

তবে $R_n(x)$-টাকে $f(x)$ দিয়ে প্রকাশ করাটাই হল Taylor theorem-এর উদ্দেশ্য। এই কাজটা একাধিক ফর্মুলা দিয়ে করা যায়, তার মধ্যে সবচেয়ে প্রচলিত ফর্মুলাটা হল--

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

যেখানে ξ_n হল a আর x-এর মাঝখানে কোনো সংখ্যা। এই ফর্মুলাটাকে বলে Lagrange's form. অপেক্ষাকৃত কম প্রচলিত আরেকটা ফর্মুলা আছে, নাম Cauchy's form, সেটা এইরকম--

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{(x-\xi_n)^n}{n!}(x-a),$$

যেখানে ξ_n হল a আর x-এর মাঝখানে কোনো সংখ্যা। দুটো ফর্মুলা সম্পূর্ণ আলাদা, তাই দুটোতেই একই নাম ξ_n ব্যবহার করেছি বটে, কিন্তু Lagrange-এর ξ_n-এর সঙ্গে Cauchy-এর ξ_n-এর কোনো সম্পর্ক নেই।

এই দুটো ফর্মুলাই আমরা এক্ষুণি প্রমাণ করব, কিন্তু তার আগে একটা জিনিস লক্ষ করি। যদি $n = 0$ নিই তবে দুটো ফর্মুলাই একই হয়ে যায়--

$$R_0(x) = f'(\xi_0)(x-a).$$

তার মানে $f(x) = f(a) + f'(\xi_0)(x-a)$, বা $x \neq a$ হলে

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_0).$$

এটা আমাদের চেনা জিনিস--Lagrange's mean value theorem. তার মানে Taylor's theorem-এর একটা special case হল Lagrange's mean value theorem. ঘুরিয়ে বললে Taylor's theorem হল Lagrange's mean value theorem-এর একটা generalisation.

এবার দেখি কি করে Taylor's theorem প্রমাণ করতে হয়।

Exercise 7: State and prove Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder after n terms.[4] ■

HINT:

|

Taylor's theorem (Cauchy's form of remainder)

Let $a < x$ be any two numbers. Let $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ be such that $f^{(n)}$ exists, and is continuous on $[a, x]$, and differentiable on (a, x). Then

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{(x-\xi_n)^n}{n!}(x-a)$$

for some $\xi_n \in (a, x)$.
The same conclusion holds if $x < a$ (with $[a, x]$ and (a, x) replaced by $[x, a]$ and (x, a), respectively).

প্রথমে ভালো করে ডানদিকটাকে দেখে নাও। এখানে দুটো জিনিস আছে, প্রথমটা হল একটা sum, যেটাকে বড় করে লিখলে হয়

$$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

আশা করি চিনতে অসুবিধা হচ্ছে না যে এটাই আমাদের n-th Taylor polynomial. দ্বিতীয় অংশটা হল remainder term-টা, Cauchy's form-এ।
এবার শর্তগুলো ভালো করে বুঝে নিই। প্রমাণের কেন্দ্রে থাকবে Rolle's theorem, যেটাকে প্রয়োগ করব $f^{(n)}$ দিয়ে তৈরী একটা function-এর উপরে। তাই $f^{(n)}$-কে Rolle's theorem-এর শর্ত অনুযায়ী নিয়েছি, মানে continuous on $[a, x]$ আর differentiable on (a, x) নিয়েছি।

<u>Proof:</u>
Without loss of generality, $a < x$.

প্রমাণটায় দুটো মোক্ষম প্যাঁচ আছে। প্রথম প্যাঁচটা এইরকম-- যেটা প্রমাণ করতে হবে তার মধ্যে সবচেয়ে বিচ্ছিরি জিনিস হল এইটা, যেটা গোল করে দেখিয়েছি--
বিচ্ছিরি বলছি কারণ ওর মধ্যে ξ_n আছে। এই বিচ্ছিরি জিনিসটাকে একদিকে রেখে বাকি সব কিছু অন্যদিকে নিয়ে যাব--

To show

$$\frac{n!}{x-a}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!}\right] = f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n.$$

বাঁদিকটার একটা নাম দিয়ে নিই--

Let

$$B = \frac{n!}{x-a}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!}\right]. \qquad (*)$$

তাহলে $B = f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n$ দেখালেই হবে। ওই জন্যই B অক্ষরটা ব্যবহার করেছি-- B for বিচ্ছিরি! এইবার দ্বিতীয় প্যাঁচ--

Define

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!} + B\cdot\frac{(x-t)}{n!}. \qquad (**)$$

এইটা কোথা থেকে পেলাম? যেটা প্রমাণ করতে হবে তার বিচ্ছিরি জায়গাটায় B লিখে আর a-র জায়গায় t লিখে এটাকে পেয়েছি। আগেই বলেছি এটা একটা প্যাঁচ, মনে রাখা ছাড়া পথ নেই। ব্যস্ আর কোনো প্যাঁচ নেই। এবার $g(t)$-র উপর Rolle's theorem লাগালেই প্রমাণ শেষ। অবশ্য আগে দেখে নেওয়া দরকার যে $g(t)$-র উপর Rolle's theorem সত্যিই লাগানো যায়, মানে $g(a) = g(x)$ হয় কি না, আর g-টা $[a,x]$-এর উপর continuous এবং (a,x)-এর উপর differentiable হয় কি না। এগুলো দেখানো সহজ--

Then

$$g(a) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + B\cdot\frac{(x-a)}{n!} = f(x)$$

by (*).

Also

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(x)\frac{(x-x)^i}{i!} + B\cdot\frac{(x-x)}{n!} = f(x).$$

এখানে $x - x = 0$ হওয়ায় সব কিছুই কেটে গেল, খালি sum-এর একেবারে প্রথম term-টা বাদে। সেই term-টা ছিল $f^{(0)}(x) = f(x)$.

$\therefore g(a) = g(x)$.

Also g is continuous over $[a,x]$ and differentiable over (a,x), since $f^{(n)}$ satisfies these conditions.

এইবার Rolle's theorem লাগাব--

So by Rolle's theorem,

$$\exists \xi_n \in (a,x) g'(\xi_n) = 0. \qquad (***)$$

এইবার আমরা $g'(t)$ বার করব। সেটা খুব কঠিন কিছু নয়, ধরে ধরে (**)-কে differentiate করলেই হবে। Sum-এর মধ্যে প্রথম term-টা হল $f^{(0)}(t) = f(t)$, সেটাকে differentiate করে পাবে $f'(t)$. তেমনি i-th term-টা হল

$$f^{(i)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!},$$

তাকে differentiate করলে হবে

$$f^{(i+1)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!} - f^{(i)}(t)\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

সব মিলিয়ে হল--

Now

$$g'(t) = f'(t) + \sum_{i=1}^{n} \left[f^{(i+1)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!} - f^{(i)}(t)\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!} \right] - \frac{B}{n!},$$

which telescopes down to

$$g'(t) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} - \frac{B}{n!}.$$

এই "telescopes down" ব্যাপারটা বুঝলে তো? যদি তোমাকে অনেকগুলো সংখ্যা দিই $a_0, ..., a_n$ তার পর $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})$ বার করতে বলি, তবে সব কিছুই প্রায় কেটে যাবে, খালি মুড়ো আর ল্যাজা বাদে--

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

একে বলে "telescoping".

So (***) becomes

$$f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{(x-\xi_n)^n}{n!} - \frac{B}{n!} = 0,$$

or,

$$B = f^{(n+1)}(\xi_n)(x-\xi_n)^n,$$

as required.

প্রমাণটা খুব সহজ ছিল না। বেশ কয়েকবার ভালো করে না পড়লে হজম হবে না।

Exercise 8: State and prove Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder.[1+4] ■

HINT:
এটা আগের অংকটাই সামান্য অন্য ভাষায়।
এবার Lagrange's form of remainder শেখা যাক।

Exercise 9: State and prove Maclaurin's theorem with Lagrange's form of remainder.[5] ■

HINT:

Maclaurin's theorem (Lagrange's form of remainder)

Let $x > 0$ be any number. Let $f : [0, x] \to \mathbb{R}$ be such that $f^{(n)}$ exists and is continuous on $[0, x]$, and is differentiable on $(0, x)$. Then

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!} + f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

for some $\xi_n \in (0, x)$.
The same conclusion holds if $x < 0$ (with $[0, x]$ and $(0, x)$ replaced by $[x, 0]$ and $(x, 0)$, respectively).

এই প্রমাণটা ঠিক আগের প্রমাণটার মতই এগোবে। তাই আর নতুন করে বোঝাচ্ছি না, খালি ধাপগুলো পরপর লিখে দিয়েছি।

Proof:
Without loss of generality, $x > 0$.
To show

$$\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!}\right] = f^{(n+1)}(\xi_n)$$

for some $\xi_n \in (0, x)$.
Let

$$B = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!}\right].$$

এবার দেখাব যে B-কে $B = f^{(n+1)}(\xi_n)$ আকারে লেখা যাবে যেখানে ξ_n হল $(0, x)$-এর মধ্যে কোনো একটা সংখ্যা।

Define

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!} + B \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Then

$$g(a) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + B \cdot \frac{(x-a)}{n!} = f(x)$$

by (*).
Also

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(x)\frac{(x-x)^i}{i!} + B \cdot \frac{(x-x)}{n!} = f(x).$$

$\therefore g(a) = g(x)$.
Also g is continuous over $[0, x]$ and differentiable over $(0, x)$, since $f^{(n)}$ satisfies these conditions.

So by Rolle's theorem,

$$\exists \xi_n \in (0,x) g'(\xi_n) = 0. \qquad (*)$$

Now

$$g'(t) = f'(t) + \sum_{i=1}^{n} \left[f^{(i+1)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!} - f^{(i)}(t)\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!} \right] - B\frac{(x-t)^n}{n!},$$

which telescopes down to

$$g'(t) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} - B\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

So (*) becomes

$$f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{(x-\xi_n)^n}{n!} - B\frac{(x-\xi_n)^n}{n!} = 0,$$

or, since $x \neq \xi_n$,

$$B = f^{(n+1)}(\xi_n),$$

as required.

DAY 12
Applications

12.1 Sufficient conditions for local extremum

আমরা আগের অধ্যায়ে শিখেছি local extremum কাকে বলে। এটাও দেখেছি যে, Fermat's theorem থেকে local extremum-এর জন্য একটা necessary condition পাওয়া যায় এইরকম--

> ধরো $f(x)$ একটা function আর a হল $f(x)$-এর domain-এর একটা interior point. যদি $x = a$-তে $f(x)$-এর একটাlocal extremum থাকে, এবং যদি $f(x)$ সেখানে differentiable হয়, তবে $f'(a) = 0$ হতে বাধ্য।

আমরা দেখেছিলাম যে $f(x)$ যদি কোনো function আর a যদি কোনো সংখ্যা হয়, তবে $f'(a) = 0$ হলেই জোর দিয়ে বলা যায় না যে, $x = a$-তে $f(x)$-এর একটা local extremum আছে।

Example 4: যদি $f(x) = x^3$ নিতাম তবে $f'(x) = 3x^2$, সুতরাং এক্ষেত্রেও $f'(0) = 0$, কিন্তু এখন $x = 0$-তে $f(x)$-এর কোনো local extremum নেই। (Fig 2)। ■

এরকম আরেকটা অংক নীচে দিলাম। এটা আগেরটার চেয়ে একটু বেশী কঠিন।

Exercise 10: ধরো $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. দেখাও যে $f'(0) = 0$ কিন্তু $x = 0$-তে কোনো local extremum নেই। ■

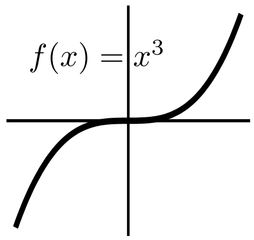


Fig 2

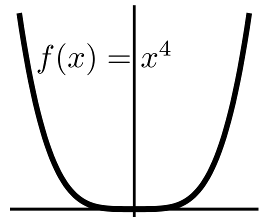


Fig 3

তার মানে খালি $f'(a) = 0$ হওয়াই local extremum থাকার পক্ষে sufficient (যথেষ্ট) নয়, আরও বাড়তি শর্ত দরকার। এরকম একটা sufficient condition এবার আমরা শিখব।
ধরো তোমাকে একটা function $f(x)$ আর একটা সংখ্যা $a \in \mathbb{R}$ দিয়ে পরীক্ষা করতে বললাম $x = a$-তে $f(x)$-এর কোনো local extremum আছে কিনা। ধরে নাও যে $f(x)$-কে তুমি a-কে ঘিরে কোনো neighbourhood-এ যতবার খুশী differentiate করতে পারো। তবে তোমার কাজ হবে এইরকম--

> তুমি পরপর $f'(a), f''(a)$ ইত্যাদি বার করে পরীক্ষা করতে থাকবে $\neq 0$ হয় কিনা। যতক্ষণ খালি 0 পাবে ততক্ষণ থামবে না, যেই প্রথম কোনো n পাবে যাতে $f^{(n)}(a) \neq 0$ হয় অমনি থেমে যাবে। তারপর দেখবে n-টা odd (বিজোড়) না even (জোড়)। যদি odd হয়, ব্যস্ গল্প শেষ, তুমি নিশ্চিন্তে বলতে পারো যে $x = a$-তে কোনো local extremum নেই। যদি n হয় even, তবে local extremum থাকতে বাধ্য। কোন ধরণের local extremum সেটা জানা যাবে $f^{(n)}(a)$-এর চিহ্ন দেখে। যদি $f^{(n)}(a) > 0$ হয় তবে local minimum, নইলে local maximum.

একটা প্রয়োগ দেখি। **Example 5:** ধরো $f(x) = x^4$. তাহলে Fig 3 থেকে বুঝতে পারছি যে $x = 0$-তে একটা local minimum আছে। এটা উপরের কায়দায় প্রমাণ করে দেখাও।
SOLUTION: এখানে $a = 0$. প্রথমে $f'(x)$ বার করি--$f'(x) = 4x^3$. সুতরাং $f'(a) = 0$. অতএব আবার differentiate করব--$f''(x) = 12x^2$, তাই $f''(a) = 0$. আবার 0. সুতরাং আরও একবার differentiate করি-- $f^{(3)}(x) = 24x$, এবারও $f^{(3)}(a) = 0$. আরও এক ধাপ যেতে হবে--$f^{(4)}(x) = 24$. এইবার $f^{(4)}(a) = 24 \neq 0$. তার মানে এখানে $n = 4$, যেটা একটা even সংখ্যা। তার মানে local extremum আছে। যেহেতু $24 > 0$ তাই local extremum-টা একটা local minimum হতে বাধ্য। ■

Example 6: নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে কোন কোন $f(x)$-এর বেলায় $x = 0$-তে local maximum বা local maximum আছে?
(1) $f(x) = x \sin x$ **(2)** $f(x) = x \cos x$ **(3)** $f(x) = -x^2 \sin^2 x$. **(4)** x^{100}. ■

এবার এই sufficient condition-টাকে গুছিয়ে লিখব এবং Taylor's theorem ব্যবহার করে প্রমাণ করব।

12.1.1 প্রমাণ

খুব সহজ একটা কথা দিয়ে শুরু করি। যদি $f'(a) > 0$ হয় তার মানে $f(x)$-টা $x = a$-তে বাড়ছে, অর্থাৎ a-র চেয়ে একটু বড় কোনো x নিলে $f(x) > f(a)$ হবে, আর a-র চেয়ে একটু ছোটো কোনো x নিলে $f(x) < f(a)$ হবে। এই কথাটাই আমরা নীচে প্রমাণ করে দেখিয়েছি। এখানে আমরা কিভাবে Lagrange's MVT ব্যবহার করব দ্যাখো। এটা একবার বুঝে গেলে বাকী প্রমাণগুলো বোঝা সহজ হবে।

THEOREM

Let f be a function and $a \in \mathbb{R}$ such that

$$f'(a) > 0.$$

Then $\exists \delta > 0$ such that

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, a+\delta) \qquad f(x) > f(a) \\ \forall x \in (a-\delta, a) \qquad f(x) < f(a). \end{aligned}$$

Proof:

Let $f'(a) = \ell > 0$.

$\because \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \ell$

$$\therefore \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(a, \delta) \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in N(\ell, \epsilon).$$

Taking $\epsilon = \ell > 0$,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(a, \delta) \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in (0, 2\ell).$$

Thus, for $x \in N'(a, \delta)$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0.$$

So

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, a+\delta) \qquad f(x) > f(a) \\ \forall x \in (a-\delta, a) \qquad f(x) < f(a), \end{aligned}$$

as required.

[Q.E.D]

এই প্রমাণে যে যুক্তি ব্যবহার করলাম সেটাই পরের অংক কয়টায় বার বার লাগাব। আমরা এক্ষুণি বলেছি যে যদি n একটা even সংখ্যা হয় আর $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ এবং $f^{(n)}(a) > 0$ হয় তবে $x = a$-তে $f(x)$-এর একটা local minimum থাকতে বাধ্য।

THEOREM

Let n be any positive even integer. Let

- $f(x)$ be $(n-1)$-times differentiable in a neighbourhood of a,
- $f(x)$ be differentiable n-times at $x = a$.
- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) > 0$.

Then $f(x)$ must have a local minimum at $x = a$.

Proof:

To show

Target $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \quad f(x) \geq f(a)$.

এটা আমরা দুই ধাপে ভেঙে দেখাব। প্রথম ধাপটা হল ঠিক আগের প্রমাণটাই, খালি এবার $f^{(n-1)}(x)$ নিয়ে কাজ হবে।

Step 1: Shall show that $\exists \delta > 0$ such that

$$\begin{array}{ll} \forall x \in (a, a+\delta) & f^{(n-1)}(x) > 0 \\ \forall x \in (a-\delta, a) & f^{(n-1)}(x) < 0. \end{array}$$

Let $f^{(n)}(a) = \ell > 0$.

$\because \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \to \ell$

$$\therefore \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(a, \delta) \quad \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \in N(\ell, \epsilon).$$

Taking $\epsilon = \ell > 0$,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(a, \delta) \quad \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \in (0, 2\ell).$$

Thus, for $x \in N'(a, \delta)$,

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} > 0.$$

So

$$\begin{array}{ll} \forall x \in (a, a+\delta) & f^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(a) \\ \forall x \in (a-\delta, a) & f^{(n-1)}(x) < f^{(n-1)}(a), \end{array}$$

as required.

এর পরের ধাপে Taylor's theorem with Lagrange's remainder ব্যবহার করব।

Step 2:

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N(a, \delta)$.

To show $f(x) \geq f(a)$.

By Taylor's theorem,

$$f(x) = f(a) + f^{(n-1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

for some $\xi \in (a, x)$.

এটা কি করে পেলাম বুঝলে তো? Taylor's theorem তো জানোই, সেখানে $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ বসিয়ে দিলেই এটা আসবে। Taylor's theorem লেখার সময়ে আমরা ξ_n লিখেছিলাম, যাতে মনে থাকে যে n বদলালে ξ_n-ও বদলাতে পারে। এখানে একটাই n নিয়ে কাজ হচ্ছে, তাই n বদলানোর প্রশ্ন নেই। অতএব আমরা ξ_n-কে সংক্ষেপে ξ লিখেছি। তুমি চাইলে ξ_n-ও লিখতে পারো।

Now

$$f^{(n-1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \geq 0.$$

⟦ Because:

If $x = a$ then obvious.

If $x \in (a, a+\delta)$ then

$$f^{(n-1)}(\xi) > 0 \text{ and } (x-a)^{n-1} > 0.$$

If $x \in (a-\delta, a)$ then

$$f^{(n-1)}(\xi) < 0 \text{ and } (x-a)^{n-1} < 0,$$

since $n-1$ is an odd integer.

⟧

So $f(x) \geq f(a)$, as required.

[Q.E.D]

প্রমাণটা বেশ লম্বা। হজম করার জন্য নীচের অংকটা কর। এখানে তোমাকে একই প্রমাণ আরেকবার করতে বলেছে, তবে যে কোনো even n-এর জন্য নয়, খালি $n = 2$-এর জন্য।

Exercise 11: Let $f(x)$ be differentiable in a neighbourhood of a, and let $f'(a) = 0$ and $f''(a) > 0$. Then $f(x)$ must have a local minimum at $x = a$. ■

আমরা local minimum-এর জন্য প্রমাণ করেছি। ঠিক একই রকম একটা প্রমাণ সম্ভব local maximum-এর বেলাতেও। কিন্তু একবার local minimum-এর প্রমাণটা করে ফেলার পর local maximum-এর জন্য আবার গোড়া থেকে শুরু করার দরকার নেই। খালি $f(x)$-এর জায়গায় $-f(x)$ নিয়ে কাজ করলেই হবে। সুতরাং নীচের দুটো অংক কষতে অসুবিধা হওয়া উচিত নয়।

Exercise 12: Let $I(\subset \mathbb{R})$ be an open interval and the function $f : I \to \mathbb{R}$ have derivative of order n at a point $c \in I$, with $f^r(c) = 0$ for $r = 1, 2, ..., n-1$, and $f^n(c) \neq 0$. If n is an even integer, show that f has a local maximum at c if $f^n(c) < 0$ while f has a local minimum at c if $f^n(c) > 0$, where f^r denotes the r-th order derivative of f with respect to x.[6] ■

Exercise 13: If $I \subset \mathbb{R}$ is an open interval and if $f : I \to \mathbb{R}$ has a derivative of order $2n$ at a point $p \in I$ with $f^{(r)}(p) = 0$ for $r = 1, 2, ..., 2n-1$, then show that f has a local maximum at p if $f^{(2n)}(p) < 0$ while f has a local minimum at p if $f^{(2n)}(p) > 0$.[6] ■

HINT:
আগের অংকটাই।
আমরা even n-এর জন্য নানারকম প্রমাণ করলাম। মনে আছে নিশ্চয়ই যে odd n-এর বেলাতেও একইরকম একটা theorem আছে--

THEOREM

Let n be any positive odd integer. Let $f(x)$ be $(n-1)$-times differentiable over $N(a, \delta)$ and $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$. If $f^{(n)}(a) \neq 0$, then $f(x)$ cannot have a local extremum at $x = a$.

Exercise 14: এই theorem-টা ঠিক আগের theorem-টার মত করে প্রমাণ করতে পারো? ■

HINT:
পুরো সমাধান করে দেব না, খালি মূল ধারণাটা দিচ্ছি। এখানেও দুই ধাপে এগোবে। Step 1 একেবারেই আগের মতন। Step 2-তে আগেরই মত Taylor's theorem লাগিয়ে পাবে

$$f(x) = f(a) + f^{(n-1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

এর পর থেকে প্রমাণটা একটু অন্য পথে এগোবে। আগের বার n ছিল even, সেটা ব্যবহার করে দেখিয়েছিলাম

$$f^{(n-1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \geq 0.$$

এবার n হল odd. তাই সব সময়েই $(x-a)^{n-1} \geq 0$. এবার চিন্তা করে দ্যাখো।

12.2 Simple problems

Exercise 15: Let f be a real valued thrice continuously differentiable function defined on some neighbourhood N of a real number c and let $f'''(c) \neq 0$. If, for $c + h \in N$, $f(c+h) =$

$f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2} f''(c + \theta h)$ $(0 < \theta < 1)$ then show that

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{3}.$$

[3] ■

HINT:

By Taylor's theorem around $x = c$,

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2} f''(c) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi),$$

where ξ is between c and $c + h$.
Given that

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2} f''(c + \theta h).$$

Comparing,

$$\frac{h^2}{2} f''(c) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi) = \frac{h^2}{2} f''(c + \theta h).$$

So for every $h \neq 0$ with $c + h \in N$,

$$f''(c) + \frac{h}{3} f'''(\xi) = f''(c + \theta h).$$

Rearranging,

$$\begin{aligned} \frac{f'''(\xi)}{3} &= \frac{f''(c+\theta h) - f''(c)}{h} \\ &= \theta \frac{f''(c+\theta h) - f''(c)}{\theta h} \end{aligned}$$

Taking limit as $h \to 0$, we have $\xi \to c$, and so $f'''(\xi) \to f'''(c)$, since f''' is continuous. Also since $0 < \theta < 1$, we have $\theta h \to 0$. So

$$\frac{f''(c+\theta h) - f''(c)}{\theta h} \to f'''(c).$$

Hence

$$\frac{f'''(c)}{3} = f'''(c) \lim_{h \to 0} \theta.$$

Hence $\theta \to \frac{1}{3}$, since $f'''(c) \neq 0$.

Exercise 16: Let f be a real valued n-times continuously differentiable function defined on

the some neighbourhood N of a real number c and let $f^n(c) \neq 0$. If, for $c+h \in N$,

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2}f''(c) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(c+\theta h)$$

for some $0 < \theta < 1$ then find $\lim_{h\to 0}\theta$. ■

DAY 13
Taylor & Maclaurin (infinite)

আমরা আগে e^x-এর Maclaurin polynomial বার করে দেখেছিলাম যে n যত বাড়ে ততই $p_n(x)$ ক্রমশঃ e^x-এর কাছে যায়। এটা আমরা ছবি দেখে বুঝেছিলাম। প্রশ্ন হল এটা কি সত্যিই সব সময়েই হয়? মানে যদি $f(x)$ কোনো একটা function হয় আর $p_n(x)$ হয় তার Maclaurin polynomial (বা Taylor polynomial) তবে কি সবসময়েই $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ হবে? যে কোনো x-এর জন্যই?
এর উত্তর হল-- না, সব সময়ে হবে না। কিন্তু অনেক সময়েই হয়ে থাকে, কিছু ভদ্রসভ্য function-এর বেলায়, কিছু বিশেষ x-এর জন্য। এবার আমরা এরকম কিছু function-এর কথা শিখব। প্রথমে একটা নতুন notation-এর কথা বলে নিই। আমরা $\lim_{n\to\infty} p_n(x)$-কে এইভাবেও প্রকাশ করে থাকি--

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

লক্ষ কর যে এখানে $\sum$-এর মাথায় ∞ লিখেছি। এই জিনিসটাকে বলে **formal infinite Maclaurin series of** $f(x)$. এখানে "formal" বলার কারণ এই যে, এটা কেবল একটা notation মাত্র, limit-টা সত্যিই exist করে বলে দাবী করা হচ্ছে না। একটা $f(x)$ দেওয়া থাকলে তার formal infinite Maclaurin series-টা লিখে ফেলা মোটেই কঠিন নয়, বার বার differentiate করে গেলেই হল--

$$f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f'(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

অবশ্য এর জন্য $f(x)$-কে infinitely many times differentiable হতে হবে, মানে এমন function হতে হবে, যাকে অসংখ্যবার differentiate করা যায়।
যদি আমরা দেখাতে পারি যে $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ তবে লিখব

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f'(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

এবং তখন একে আর formal infinite Maclaurin series না বলে বলব $f(x)$-এর **Maclaurin series expansion.** আমরা যদি $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ লিখি, তবে $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ দেখানো মানে $R_n(x) \to 0$ দেখানো। মনে আছে নিশ্চয়ই যে $R_n(x)$-কে বিভিন্ন রূপে লেখা যায়--Lagrange's form, Cauchy's form. সেগুলো এবার কাজে লাগবে।

13.1 General techniques

আমরা নীচের অংকগুলোতে দেখাব $R_n(x) \to 0$. এর জন্য প্রধান যে জিনিসটা ব্যবহার করব, সেটা এইরকম--

> যদি $R_n(x) = b_n c_n$ হয় যেখানে $\{b_n\}_n$ হল bounded, আর $c_n \to 0$, তবে $R_n(x) \to 0$ হবে।

অতএব আমাদের সব সময়ে লক্ষ থাকবে $R_n(x)$-কে দুটো factor-এ ভেঙে ফেলা যার মধ্যে একটা bounded, অন্যটা 0-তে যায়। এখন কথা হল $R_n(x)$-কে নানাভাবেই factor-এ ভাঙা যায়। কোনভাবে ভাঙলে কাজ হবে সেটা বোঝার জন্য নীচের তথ্যগুলো কাজে দেবে। প্রথমতঃ bounded দেখানোর জন্য--

- যদি $0 \leq a_n \leq 1$ হয় তবে $\{a_n^n\}_n$ একটা bounded sequence হবে, কারণ 1^n সব সময়েই 1, তা n যাই হোক না কেন!

দ্বিতীয়তঃ, limit=0 দেখানোর জন্য--

- যদি $0 < r < 1$ নিই তবে $r^n \to 0$ হয়।

Limit=0 দেখানোর জন্য খুব কাজে লাগবে নীচের theorem-টা, যেটাকে আমরা এই বইয়ে নাম দিয়েছি “ratio trick”. এটা অবশ্য প্রচলিত কোনো নাম নয়, সেরকম কোনো নাম আছে বলে জানি না।

“Ratio trick”

Let $\{x_n\}_n$ be a sequence of positive terms such that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Then

$$x_n \to 0.$$

Proof:

Let

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell < 1.$$

Take $r = \frac{1}{2}(\ell+1)$.

Then $\ell < r < 1$.

Take $\epsilon = r - \ell > 0$.

Then

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad \tfrac{x_{n+1}}{x_n} \in N(\ell, \epsilon).$$

So $\forall n \geq M \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < r < 1$.

Hence

$$\begin{aligned}
x_{M+1} &< x_M r, \\
x_{M+2} &< x_{M+1} r = x_M r^2, \\
x_{M+3} &< x_{M+2} r = x_M r^3, \\
&\vdots \\
x_{M+n} &< x_M r^n.
\end{aligned}$$

> Thus $x_n \to 0$, as required.

[Q.E.D]

এই বার আমরা কয়েকটা পরিচিত function-এর infinite Maclaurin series শিখব। প্রথমে $\sin x, \cos x$ আর e^x দিয়ে শুরু করব। এদের বেলায় তেমন কোনো জটিলতা নেই, তারপর বার করব $\log(1+x)$-এর infinite Maclaurin series. এখানে একটু বেশী খাটতে হবে। সবশেষে হাত দেব $(1+x)^m$-এর infinite Maclaurin series-এ। প্রতি ক্ষেত্রেই আমরা শুরু করব formal infinite Maclaurin series-টা বার করে। তার পরে দেখব limit-টা কখন function-টার সমান হয়।

13.2 $\sin x, \quad \cos x, \quad e^x$

Exercise 17: Obtain the Maclaurin series for the function $\sin x$. Also find the values of x for which the expansion holds. ■

HINT:

> $f(x) = \sin x$ is differentiable infinitely often, and hence its formal Maclaurin series is
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

এবার তবে $f^{(n)}(0)$-গুলো বার করি, differentiate করে করে--

> Now
> $$\begin{aligned} f^{(0)}(x) \equiv f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

যদি আরেকবার differentiate করি তবে আবার $\sin x$ ফিরে পাব, এবং তারপর আবার $\cos x$, $-\sin x$ ইত্যাদি করে চলতে থাকবে। তাই একবারে লিখতে পারি--

> and, continuing in this way,
> $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{if } n = 4k \\ \cos x & \text{if } n = 4k+1 \\ -\sin x & \text{if } n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{if } n = 4k+3 \end{cases}$$

এই জায়গাটা ভালো করে বুঝে দ্যাখো। মনে রেখো যে, যে কোনো $n \in \mathbb{N}$-কেই এই চারটে আকারের একটাতে লেখা যায়--$4k, 4k+1, 4k+2$ আর $4k+3$.
যেহেতু $\sin 0 = 0$ আর $\cos 0 = 1$, তাই--

So

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 4k+1 \\ -1 & \text{if } n = 4k+3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Thus the formal Maclaurin series is

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - + - \cdots.$$

এই বার দ্যাখাব যে সব $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই এটা $f(x) = \sin x$-এর সমান, মানে $R_n(x) \to 0$.

We shall show

Target $\forall x \in \mathbb{R} \quad R_n(x) \to 0,$

where $R_n(x)$ is the remainder term for n-th Maclaurin polynomial.

$\forall x$ Take any $x \in \mathbb{R}$.

এখানে আমরা $R_n(x)$-এর জন্য Lagrange's form ব্যবহার করব। ঠিক কখন কোন form-টা কাজে লাগবে সেটা বোঝার কোনো সহজ উপায় আছে বলে জানি না।

Using Lagrange's form,

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_n) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

for some ξ_n between 0 and x.

So

$$|R_n(x)| = |f^{(n+1)}(\xi_n)| \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

এইবার আমরা এটাকে দুটো factor-এ ভাঙার চেষ্টা করব, একটা bounded, অন্যটার limit=0.

Now $|f^{(n+1)}(x)|$ is $|\sin x|$ or $|\cos x|$, and hence bounded (by 1).

বাকী factor-টার limit=0 দেখানোর চেষ্টা করি। প্রথমে সেটার একটা নাম দিয়ে নিই--

Let $T_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

এবার আমরা "ratio trick" লাগাব, মানে $\lim \frac{T_{n+1}}{T_n} < 1$ দেখাব--

Then

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \Big/ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+2} \to 0 < 1.$$

$\therefore T_n \to 0.$

$\therefore R_n(x) \to 0$ as required.

এই অংকটা যদি বুঝে থাকো, তবে নীচের অংক দুটো একইভাবে করতে পারা উচিত।

Exercise 18: Prove that the Maclaurin expansion for $\cos x$ is

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - + - \cdots,$$

and that this expansion holds for any $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercise 19: Prove that the Maclaurin expansion for e^x is

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

and that this expansion holds for any $x \in \mathbb{R}$. ■

13.3 $\log(1+x)$

এইবার আমরা $f(x) = \log(1+x)$-এর infinite Maclaurin series বার করব। এর মধ্যে বেশ কয়েকটা প্যাঁচ আছে, সাবধানে পড়।

Exercise 20: Obtain Maclaurin's infinite series expansion of $\log(1+x)$, $-1 < x \leq 1$.[5] ■

HINT:

প্রথমে formal Maclaurin series-টা বার করে নিই--

Let $f(x) = \log(1+x)$ for $-1 < x \leq 1$.
$\because f(x)$ is differentiable infinitely often on $(-1, 1]$. So its formal infinite Maclaurin series is

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

এবার তবে $f^{(n)}(0)$-গুলো বার করতে হবে। তার জন্য $f^{(n)}(x)$-এর একটা ফর্মুলা পাওয়া গেলে সুবিধা হবে। $f(x) = \log(1+x)$-কে বার কয়েক হাতে differentiate করে দেখি, কোনো প্যাটার্ণ চোখে পড়ে কিনা।

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{1 \times 2}{(1+x)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-1 \times 2 \times 3}{(1+x)^4}. \end{aligned}$$

প্যাটার্ণটা দেখছো? নীচের $(1+x)$-এর power-টা এক এক করে বাড়ছে, চিহ্নটা একবার প্লাস একবার মাইনাস হচ্ছে, আর উপর তলায় $1 \times 2 \times 3 \times$ ইত্যাদি করে বেড়ে চলেছে। সুতরাং--

Now

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\log(1+x) & \text{if } n=0\\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} & \text{if } n=1,2,3,...\end{cases}$$

So

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{if } n=0\\ (-1)^{n-1}(n-1)! & \text{if } n=1,2,3,...\end{cases}$$

So the formal Maclaurin series of $\log(1+x)$ is

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+-+\cdots.$$

এবার দেখাব যে $x\in(-1,1]$ হলে এই formal Maclaurin series-টা সত্যিই $f(x)=\log(1+x)$-এর সমান।

Shall show that this expansion holds for any $x\in(-1,1]$.

Enough to show that

Target $\forall x\in(-1,1]\quad R_n(x)\to 0.$

$\forall x$ Take any $x\in(-1,1]$.

এইবার কাজটা একটু জটিল। এখানে $(-1,1]$-কে দুটো কেসে ভেঙে নিতে হবে--

$$(-1,1]=(-1,0)\cup[0,1].$$

যদি $x\in[0,1]$ হয় (Fig 4) তবে Lagrange's form-এ কাজ হবে। আর যদি $x\in(-1,0)$ হয় (Fig 5) তবে Cauchy's form কাজে আসবে।

Case 1: $x\in[0,1]:$ Using Lagrange's form,

$$\begin{aligned}R_n(x) &= f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi_n)^{n+1}}\times\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= (-1)^n\left(\frac{x}{1+\xi_n}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

আমরা কাজ করব $|R_n(x)|$ নিয়ে। Absolute value নিলে ওই $(-1)^n$-টা চলে যাবে--

Fig 4

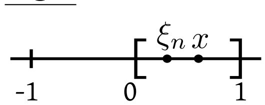
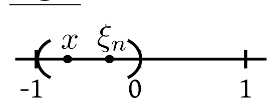


Fig 5



$$\therefore |R_n(x)| = |[|\frac{x}{1+\xi_n}|]|^{n+1}\frac{1}{n+1}$$

এবার factor-এ ভাঙার পালা-- একটা bounded, অন্যটার limit=0. এখানে $|[|\frac{x}{1+\xi_n}|]|^{n+1}$ হল bounded, আর $\frac{1}{n+1} \to 0$.

Now $\because 0 \leq |[|\frac{x}{1+\xi_n}|]| < x < 1$,
$|[|\frac{x}{1+\xi_n}|]|^{n+1}$ is bounded.
Also $\frac{1}{n+1} \to 0$.
So $R_n(x) \to 0$, as required.

এবার পরের কেস $x \in (-1, 0)$. লক্ষ কর কিভাবে $R_n(x)$-কে Cauchy's form-এ লিখে দলাইমলাই করি।

Case 2: $x \in (-1, 0)$:

Using Cauchy's form of remainder

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{(x-\xi_n)^n}{n!}x \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi_n)^n} \times \frac{(x-\xi_n)^n}{n!}x \\ &= (-1)^n\frac{x(x-\xi_n)^n}{(1+\xi_n)^n}. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |[|\frac{x(x-\xi_n)^n}{(1+\xi_n)^n}|]| \\ &\leq \left(\frac{\xi_n - x}{\xi_n + 1}\right)^n. \end{aligned}$$

এবার দেখাব যে $0 < \frac{\xi_n - x}{\xi_n + 1} < -x$. এটা দেখালেই কেল্লা ফতে কারণ তাহলে

$$0 < \left(\frac{\xi_n - x}{\xi_n + 1}\right)^n < (-x)^n,$$

আর যেহেতু $-x < 1$, তাই $(-x)^n \to 0$.

Now

$$0 < \frac{\xi_n - x}{\xi_n + 1} = 1 - \frac{1+x}{\xi_n + 1} < 1 - (1+x) = -x < 1.$$

So, $\because -x < 1$,

$$|R_n(x)| < (-x)^n \to 0,$$

as required.

Exercise 21: Using Maclaurin's series establish with proper justification that

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad -1 < x \leq 1.$$

[3] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

13.4 $(1+x)^m$

এবার আমরা $f(x) = (1+x)^m$-এর infinite Maclaurin series বার করব। এবার জটিলতা আরও একটু বাড়বে। ঠাণ্ডা মাথায় পড়।

Exercise 22: Obtain Maclaurin's infinite series expansion of $(1+x)^m$ where m is any real number other than a positive integer and $|x| < 1$.[4] ■

HINT:

Let $f(x) = (1+x)^m$ where $m \notin \mathbb{N}$.

অংকটায় বলেছে বটে যে "m is not a positive integer", কিন্তু আসলে $m \in \mathbb{N}$ হলেও একই যুক্তি খাটবে, বরং অংকটা সেক্ষেত্রে অনেক সহজ হয়ে যাবে।

$\because f(x)$ is infinitely often differentiable on $(-1,1)$, so its formal Maclaurin infinite series is

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}.$$

Now

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

এই $m(m-1)\cdots(m-k+1)$ জিনিসটা আমাদের বার বার লিখতে হবে। এর একটা সংক্ষিপ্ত প্রচলিত notation আছে--$(m)_k$. এবার আমরা সেটাই ব্যবহার করব। আগে notation-টা লিখে নেওয়া ভালো।

$\therefore$ Defining

$$(m)_k = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-k+1) & \text{if } k = 1,2,... \\ 1 & \text{if } k = 0 \\ , & \end{cases}$$

the formal series is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m)_k x^k}{k!}.$$

Shall show that the expansion holds for each $x \in (-1,1)$, *i.e.*,

Target $\forall x \in (-1,1) \quad R_n(x) \to 0.$

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in (-1,1)$.

প্রথমে একটা সহজ কেস সেরে রাখি--যখন $x = 0$.

If $x = 0$ then $R_n(x) = (1+0)^n - (m)_0 = 0$. So trivially $R_n(0) \to 0$.

যদি $x \neq 0$ হয় তবে Cauchy's form of remainder লাগাব।

If $x \neq 0$, then, using Cauchy's form,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f^{(n+1)}(\xi_n)\frac{(x-\xi_n)^n}{n!}x \\ &= (m)_{n+1}(1+\xi_n)^{m-n-1}\frac{(x-\xi_n)^n}{n!}x. \end{aligned}$$

Now

$$R_n(x) = x(1+\xi_n)^m \times \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right)^n \times \frac{(m)_{n+1}}{n!}x^n.$$

দ্যাখো কি ভাবে তিনটে factor-এ ভেঙেছি। ঠিক এইভাবে ভাঙলেই যে কাজ হবে সেটা আগে ভাগে বোঝা খুব কঠিন। নানারকমভাবে ভেঙে ভেঙে দেখার পর বোঝা যায় যে কোনভাবে ভাঙাটা ভালো। এবার বলি আমরা কি করতে চলেছি। আমরা দেখাব যে প্রথম দুটো factor-ই bounded. আর তৃতীয় factor-টার limit হল 0. তাতেই প্রমাণ হবে যে $R_n(x) \to 0$. আমরা এই তিনটে জিনিস তিনটে ধাপে দেখাব।
প্রথম ধাপটা সহজ--

Step 1: $x(1+\xi_n)^m$ is bounded.

⟦ Because:

$$|1+\xi_n| < 1 + |\xi_n| < 2.$$

⟧

দ্বিতীয় ধাপটা কম সহজ--

Step 2: Shall show $\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right)^n$ is bounded.

তার জন্য এটা দেখালেই চলবে যে $|[|\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}|]| < 1$. এখানে x-টা positive আর negative, তার উপর নির্ভর করে যুক্তিটা সামান্য আলাদা। চোখের সামনে Fig 6 রাখলে সুবিধা হবে।

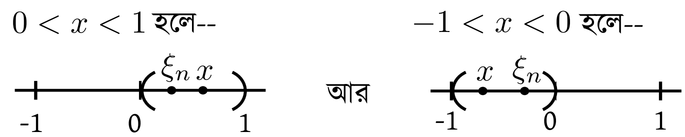


Fig 6

Now

$$|[|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}|]| < 1.$$

⟦ <u>Because:</u>

If $0 < x < 1$ then $0 < \xi_n < x < 1$.

$$\therefore |[|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}|]| = \frac{x-\xi_n}{1+\xi_n} < x - \xi_n < x < 1.$$

If $-1 < x < 0$ then $-1 < x < \xi_n < 0$.

$$\begin{aligned} \therefore |[|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}|]| &= \frac{\xi_n - x}{1+\xi_n} \\ &= 1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \\ &< 1 - \frac{1+x}{1+0} \quad [\because \xi_n < 0] \\ &= -x < 1. \end{aligned}$$

⟧

Hence $\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right)^n$ is bounded.

তৃতীয় ধাপে আমরা “ratio trick” লাগাব--

<u>Step 3:</u> Shall show

$$T_n \equiv |[|\frac{(m)_{n+1}}{n!}x^n|]| \to 0.$$

Enough to show that

$$\lim_n \frac{T_{n+1}}{T_n} < 1.$$

$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{|(m)_{n+1}|}{n!}|x|^n \Big/ \frac{|(m)_n|}{(n-1)!}|x|^{n-1}$$
$$= \frac{|m-n|}{n}|x| \to |x| < 1.$$

So $T_n \to 0$, as required.

Exercise 23: Obtain Maclaurin's infinite series expansion of $(1+x)^m$ where m is any real number other than a positive integer and $|x| < 1$.[3] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

DAY 14
L'Hôpital's rule (part 1)

আমরা জানি দুটো limit-কে চমৎকার যোগ বিয়োগ আর গুণ করা যায়। মানে

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ আর } \lim_{x\to a} g(x) = B$$

হলে (যেখানে A, B দুটো সংখ্যা, $\pm\infty$ নয়),

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B \text{ আর } \lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$$

হয়। যদি $x \to a$ না নিয়ে অন্য কিছু নিই যেমন $x \to a-, x \to a+$ বা $x \to \infty$ বা $x \to -\infty$, তাতেও কিছুমাত্র অসুবিধা নেই। কিন্তু সমস্যা হয় ভাগের বেলায়। তখন দেখতে হয় denominator-এর limit-টা শূন্য হয়ে যাচ্ছে কিনা। যদি না হয় তবে নিশ্চিন্ত--

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ আর } \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0,$$

হলে

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

হবে (এখানে A, B কেউই $\pm\infty$ নয় ধরে নিচ্ছি)। কিন্তু যদি $B = 0$ হয়ে যায় তবে কয়েকটা কেসে ভেঙে নিতে হবে। যদি $A \neq 0$ হয়, তবে দেখতে হবে যে x যখন a-র দিকে যাচ্ছে, তখন $g(x)$-টা $x = a$-এর কাছে 0-র খালি একদিকেই সীমাবদ্ধ কি না। যেমন যদি $g(x) = x^2$ হয় বা $g(x) = x^3$ হয় দুইক্ষেত্রেই

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

কিন্তু $g(x) = x^2$ হলে $g(x)$ শূন্যর দিকে এগোচ্ছে positive দিক থেকে $(\because x^2 \geq 0)$. কিন্তু $g(x) = x^3$ হলে সেরকম কিছু বলা যায় না।

Example 7: ধরো $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^2$. তাহলে

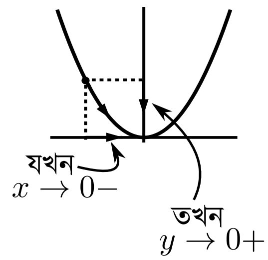


Fig 7

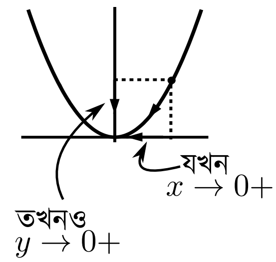


Fig 8

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

কি হবে?

SOLUTION: এখানে $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 > 0$ আর $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. লক্ষণীয় যে, $g(x)$ শূন্যর দিকে এগোচ্ছে positive দিক থেকে। Fig 7 আর Fig 8 দ্যাখো। তাই বলতে পারি যে,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

■

Example 8: এবার ধরো $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^3$. এখানে

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

কি হবে?

SOLUTION: আগের মতই এবারও $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 > 0$ আর $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. কিন্তু $g(x)$ শূন্যর দিকে খালি এক পাশ থেকে এগোচ্ছে না। Fig 9 আর Fig 10 দ্যাখো। তাই বলতে পারি যে,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ exist } \text{ করে না।}$$

■

Fig 9

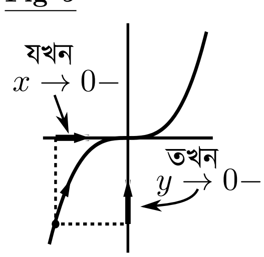
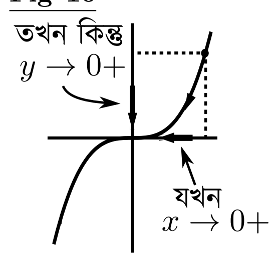


Fig 10



Exercise 24: বল তো $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ কি হবে? সাবধান, উত্তরটা কিন্তু ∞ নয়! ■

14.1 $\frac{0}{0}$ form

যদি $\lim f(x)\to 0$ আর $\lim g(x)\to 0$ হয়, তবে $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ কি হবে? এখানে limit-টার চেহারা হল $\frac{0}{0}$-র মত। কিন্তু খালি এটুকু থেকেই নিশ্চিত হয়ে বলা যায় না যে limit-টা কি হবে। তাই $\frac{0}{0}$ চেহারাটাকে বলে একটা indeterminate form. নীচের উদাহরণটা করলেই এই নামকরণের সার্থকতা বুঝবে।

Example 9: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে একটা করে $f(x)$ আর $g(x)$ দেওয়া আছে। সবার বেলাতেই $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ আর $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ হয়। তার মানে $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$-এর চেহারাটা হল $\frac{0}{0}$. এবার প্রতি ক্ষেত্রে সরাসরি $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$-টা কষে ফ্যালো।

1. $f(x)=37x, \quad g(x)=x,$
2. $f(x)=x^2, \quad g(x)=x,$
3. $f(x)=-x, \quad g(x)=x^3,$
4. $f(x)=-x, \quad g(x)=x^2,$
5. $f(x)=x^2, \quad g(x)=x^4,$

SOLUTION:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0} 37=37,$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0} x=0,$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=-\infty,$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ exist করে না।
5. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$

তাহলেই দ্যাখো ওই $\frac{0}{0}$-র আড়ালে সব রকম limit-ই লুকিয়ে থাকতে পারে-- যে কোনো finite সংখ্যা, $\pm\infty$ এমন কি exist পর্যন্ত না করতে পারে! সাধে কি বলে indeterminate form! ■

এই $\frac{0}{0}$-র পিছনে ঠিক কি লুকিয়ে আছে সেটা বার করার একটা জবরদস্ত্ হাতিয়ার হল L'Hôpital's rule. ওই বিদঘুটে দেখতে শব্দটা একজন ফরাসী জমিদারের পদবী, উচ্চারণ হল "লোপিতাল"। L'Hôpital's rule মোটেই L'Hôpital-এর আবিস্কার নয়, ওটা আসলে L'Hôpital-এর গৃহশিক্ষক Bernoulli-র (বার্ণৌলি) আবিস্কার। আগেকার দিনে বানানটাকে লেখা হত L'Hospital. যদিও ফরাসী মতে ওই 'H' আর 's'-টার উচ্চারণ হওয়ার কথা নয়, কিন্তু অনেককেই বলতে শুনি "এল হস্পিটাল" (যেন কোনো হাসপাতালের কথা হচ্ছে!)

L'Hôpital's rule-এর নানারকম খুঁটিনাটি আছে। কিন্তু মোটামুটি ব্যাপারটা এইরকম-- যদি $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$-টা $\frac{0}{0}$ চেহারার হয়, কিন্তু $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ বার করতে অসুবিধা না থাকে, তবে

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

হবে। মানে $f(x), g(x)$ নিয়ে কাজ করতে সুবিধা না হলে তাদের derivative-দের নিয়ে কাজ কর। অবশ্যই এর জন্য নানারকম শর্ত লাগবে (যেমন একটা শর্ত তো বুঝতেই পারছ--$f(x)$ আর $g(x)$-কে differentiable হতে হবে)।

L'Hôpital's rule

Let a be any number and $f(x), g(x)$ be two functions such that

- they are differentiable on $(a, a+\delta)$ for some $\delta > 0$,
- $\forall x \in (a, a+\delta) \quad g'(x) \neq 0$,
- $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exists (finite or infinite).

Then

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

এখানে আমরা "$x \to a+$"-র বদলে "$x \to a-$" বা "$x \to a$" নিয়েও কাজ করতে পারতাম। সেক্ষেত্রে খালি $(a, a+\delta)$-র জায়গায় $(a-\delta, a)$ বা $N'(a, \delta)$ লাগত। এমন কি আমরা $x \to \infty$ বা $x \to -\infty$-ও নিতে পারতাম। সেক্ষেত্রে $(a, a+\delta)$-র পরিবর্তে লাগত (M, ∞) বা $(-\infty, -M)$. এই কথাগুলো আরো স্পষ্ট করে বলব theorem-টা প্রমাণ করার সময়ে, এই অধ্যায়ের শেষের দিকে।
লক্ষ কর এখানে তিনটে শর্ত লেগেছে। শর্তগুলো মনে রাখা কঠিন কিছু নয়। আমরা এখানে $x \to a+$ নিচ্ছি, তাই $(a, a+\delta)$-র দরকার হয়েছে, কারণ আমরা ডানদিক থেকে a-র দিকে এগোতে চাই। আর যেহেতু আমরা $f'(x), g'(x)$ নিয়ে কাজ করব, সুতরাং differentiability তো লাগবেই। আমাদেরকে $g'(x)$ দিয়ে ভাগ করতে হবে, তাই $g'(x) \neq 0$ দরকার পড়েছে। বাকী যে শর্তটা রইল সেটা একটু গোলমেলে। এই theorem-টা কিন্তু বলছে না যে,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ আর } \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

মানে একই জিনিস। বলছে যে, <u>যদি</u> দ্বিতীয় limit-টা exist করে (finite বা infinite যাই হোক) <u>তবে</u> ওরা এক। কিন্তু এমনটা হতেই পারে যে, দ্বিতীয় limit-টা exist করে না, কিন্তু প্রথম limit-টা তাও দিব্যি exist করে! এরকম একটা উদাহরণ রয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 25: If $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ and $g(x) = \tan x$ show that although

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

does not exist,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

exists.[2] ■

HINT:

> For $x \neq 0$,
> $$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$
> and for $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
> $$g'(x) = \sec^2 x.$$
> So, for $x \in N'(0, \frac{\pi}{2})$,
> $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cos^2 x \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right).$$
> Now $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ does not exist, but $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ exists.

আশা করি এটা কি করে হল বুঝতে পারছ। আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম কেন $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ exist করে না। কিন্তু $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$.

> $\therefore \lim_{x\to 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ does not exist.
> Again $\lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1$.
> $\therefore \lim_{x\to 0} \cos^2 x (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ does not exist.
> Now
> $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\tan x} = x \sin \frac{1}{x} \times \frac{x}{\sin x} \times \cos x.$$
> We know that
> $$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ and } \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$
> So
> $$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} \times \frac{x}{\sin x} \times \cos x = 0 \times 1 \times 1 = 0.$$

14.2 Application 1

Exercise 26: If f'' is continuous at the point a, show that

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

[3] ■

HINT:

Let

$$\begin{aligned} F(h) &= f(a+h)+f(a-h)-2f(a) \\ G(h) &= h^2. \end{aligned}$$

Then

$$\lim_{h\to 0} F(h) = f(a)+f(a)-2f(a) = 0,$$

since $f(x)$ must be continuous at $x=a$, because it is differentiable there.

Also,

$$\lim_{h\to 0} G(h) = 0.$$

Both numerator and denominator are differentiable w.r.t. h.

Now

$$\lim_{h\to 0} \frac{F'(h)}{G'(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}.$$

Now

$$\lim_{h\to 0} F'(h) = \lim_{h\to 0} G'(h) = 0,$$

and $F'(h), G'(h)$ are differentiable.

Now

$$\lim_{h\to 0} \frac{F''(h)}{G''(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2} = f''(a),$$

since $f''(x)$ is continuous at $x=a$.

$\therefore$ Applying L'Hôpital's rule twice,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{G(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{F'(h)}{G'(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{F''(h)}{G''(h)} = f''(a),$$

as required.

নীচের অংকটা দেখতে একই রকম, কিন্তু আসলে ভুল।

Exercise 27: Let f be a real-valued function, thrice continuously differentiable in a neighbourhood of a, and let $f''(a)=0$. Prove that

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}[f(a+h)-2f(a)+f(a-h)] = \frac{1}{3}f'''(a).$$

[4] ■

HINT:
এই অংকটা ভুল। সেটা $f(x)=x^3$ আর $a=0$ নিলেই বুঝবে।

Let $f(x) = x^3$ and $a = 0$. This f satisfies all the given conditions.

Now

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}[f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}[h^3 - 0 + (-h)^3] = 0,$$

but

$$\frac{1}{3}f'''(a) = 2 \neq 0.$$

এই অংকটাকে নানাভাবে মেরামত করার চেষ্টা করা যায়। প্রথম চেষ্টার ফলে নীচের অংকটার জন্ম হয়েছে।

Exercise 28: Let f be a real-valued function, thrice continuously differentiable in a neighbourhood of a, and let $f''(a) = 0$. Prove that

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}[f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)] = 0.$$

[4] ■

HINT:

Let

$$\begin{aligned} F(h) &= f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \\ G(h) &= h^3 \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} F'(h) &= f'(a+h) - f'(a-h) \\ F''(h) &= f''(a+h) + f''(a-h) \\ F'''(h) &= f'''(a+h) - f'''(a-h) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} G(h) &= h^3 \\ G'(h) &= 3h^2 \\ G''(h) &= 6h \\ G'''(h) &= 6. \end{aligned}$$

Let

$$L_k = \lim_{h\to 0} \frac{F^{(k)}(h)}{G^{(k)}(h)} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Since

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} F(h) &= \lim_{h\to 0} F'(h) = \lim_{h\to 0} F''(h) = 0\\ \lim_{h\to 0} G(h) &= \lim_{h\to 0} G'(h) = \lim_{h\to 0} G''(h) = 0\end{aligned}$$

So L_0, L_1, L_2 have the indeterminate $\frac{0}{0}$ form. Also $L_3 = 0$.
$\therefore$ By repeated applications of L'Hôpital's rule, the required limit is

$$L_0 = L_1 = L_2 = L_3 = 0.$$

বিকল্প পদ্ধতি

By the given condition $\exists \delta > 0$ such that f is thrice continuously differentiable over $N(a, \delta)$.
Take $h \in N(0, \delta)$. Then by Taylor's theorem

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1),$$

for some ξ_1 strictly between a and $a+h$.
Since $f''(a) = 0$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1),$$

Similarly,

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2),$$

for some ξ_2 strictly between a and $a-h$.
So

$$\frac{1}{h^3}[f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)] = \frac{1}{6}[f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)]$$

Now, as $h \to 0$ we have $\xi_1, \xi_2 \to a$, and hence by continuity of f''' at a,

$$f'''(\xi_1), f'''(\xi_2) \to f'''(a).$$

So

$$\frac{1}{6}[f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)] \to \frac{1}{6}[f'''(a) - f'''(a)] = 0,$$

as required.

মেরামতির দ্বিতীয় প্রচেষ্টা এইরকম--

Exercise 29: Let f be a real-valued function, thrice continuously differentiable in a neigh-

bourhood of a, and let $f'(a)=0$. Prove that

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}[f(a+h)-f(a-h)]=\frac{1}{3}f'''(a).$$

[4] ■

(??) নম্বরের ভুল অংকটাকে এভাবেও মেরামত করা যায়--

Exercise 30: Let f be a real-valued function, thrice continuously differentiable in a neighbourhood of a. Prove that

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}[f(a+h)-f(a-h)-2hf'(a)]=\frac{1}{3}f'''(a).$$

[4] ■

Exercise 31: If a function f is such that $f^n(a)$ exists and M is such that

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{n!}M,$$

show that $M\to f^n(a)$ when $h\to 0$.[5] ■

HINT:

Here, for $h\neq 0$,

$$M=\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)}{h^n/n!}.$$

লক্ষ কর যে M আসলে h-এর একটা function.

Let

$$\begin{aligned}F(h)&=f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)\\ G(h)&=\frac{h^n}{n!}\end{aligned}$$

Then for $k=0,1,...,n-2$,

$$\lim_{h\to 0}F^k(h)=0 \text{ and } \lim_{h\to 0}G^k(h)=0.$$

Now

$$\lim_{h\to 0}F^{n-1}(h)=f^{n-1}(a+h)-f^{n-1}(a) \text{ and } G^{n-1}(h)=h.$$

So

$$\lim_{h\to 0}\frac{F^k(h)}{G^k(h)}$$

has $\frac{0}{0}$ form for $k = 0, ..., n-2$, and

$$\lim_{h\to 0} \frac{F^{n-1}(h)}{G^{n-1}(h)} = f^n(a).$$

Hence, by repeated application of L'Hopital we get

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{G(h)} = \cdots = \lim_{h\to 0} \frac{F^{n-1}(h)}{G^{n-1}(h)} = f^n(a),$$

as required.

Exercise 32: If a function f is such that $f^n(a)$ exists finitely and for a real variable h with $|h| < \delta$, a function M is defined as

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!}M,$$

show that $M \to f^n(a)$ when $h \to 0+$.[4] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

DAY 15
L'Hôpital's rule (part 2)

15.1 Application 2

Exercise 33: Find a and b in order that

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\sin 2x - b\sin 3x}{5x^3} = 1.$$

[3] ■

HINT:
এই অংকটা দেখেই বোঝা যায় যে L'Hôpital লাগাবার পক্ষে আদর্শ, কারণ এখানে একটা function-কে আরেকটা function দিয়ে ভাগ করে limit নেওয়া হচ্ছে, আর দুটো function-এরই নিজেদের limit হল 0. তার মানে $\frac{0}{0}$ form. অংকটা অবশ্য অন্যভাবেও করা যায়, Taylor বা Maclaurin theorem দিয়ে, এবং কোনো কোনো ক্ষেত্রে সেটাই সহজতর হয়। কিন্তু আগে আমরা L'Hôpital দিয়ে সমাধানটা শিখি, তারপর অন্য কায়দাটা শিখব।
প্রথমেই numerator আর denominator-এর function-দুটোর একটা করে নাম দিয়ে নিই--

Let

$$\begin{aligned} f(x) &= a\sin 2x - b\sin 3x \\ g(x) &= 5x^3. \end{aligned}$$

লক্ষ কর যে, যতই আমরা $g(x)$-কে differentiate করব ততই x-এর power-টা এক এক করে কমতে থাকবে। যখন power-টা 0 হয়ে যাবে, তখন আমরা থামব, কারণ তখন limit-টা এমনিই বার করা যাবে, যেহেতু denominator-এর limit-টা nonzero হবে। যেহেতু $g(x)$-এ x-এর power-টা হল 3, তাই ঠিক তিনবার differentiate করতে হবে। এটা অনেকটা রন্ধনপ্রণালীর মত ব্যাপার--যতক্ষণ না পুরো রসটা মজে আসে ততক্ষণ ভাজতে থাকুন।
মোট যখন তিনবার differentiate করতেই হবে, সেই তালিকাটা এখনই তৈরী করে রাখি--

Then

$$\begin{aligned} g'(x) &= 15x^2 \\ g''(x) &= 30x \\ g'''(x) &= 30, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2a\cos 2x - 3b\cos 3x \\ f''(x) &= -4a\sin 2x + 9b\sin 3x \\ f'''(x) &= -8a\cos 2x + 27b\cos 3x, \end{aligned}$$

তার মানে আমরা এই তিনটে limit নিয়ে কাজ করব--

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ আর } \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}.$$

চট্ করে ভেবে নিই এদের মধ্যে কারা $\frac{0}{0}$ form-এর। দেখাই যাচ্ছে যে প্রথমটা আর তৃতীয়টা $\frac{0}{0}$ আকারের, এবং শেষেরটা মোটেই ওই আকারের নয়। দ্বিতীয়টার ব্যাপারটা ঠিক বোঝা যাচ্ছে না। ওর denominator-এর limit-টা 0, কিন্তু numerator-এর limit-টা হল $2a-3b$, যেটা 0 কিনা আমরা এখনও জানি না।
অনেক ছাত্রকে দেখেছি, এই অব্ধি এসে ধাঁ করে লিখে দেয় $2a-3b=0$. জিজ্ঞাসা করলে বলে, দেখাই যাচ্ছে যে এটা L'Hôpital-এর অংক, তাই $\frac{0}{0}$ লাগবে, সুতরাং $2a-3b=0$ হতেই হবে! এটা মোটেই সঠিক যুক্তি নয়। তোমাকে তো আর বলে দেয় নি যে, L'Hôpital লাগবেই! সেটা তোমার আন্দাজ মাত্র। সত্যিই যে L'Hôpital লাগানো যাবে, সেটা প্রমাণ করাটাও তোমারই কর্তব্য। সেই কাজটা কি ভাবে করছি ভালো করে লক্ষ কর। এর মধ্যে একটা ছোট্টো প্যাঁচ আছে।

Now

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

has $\frac{0}{0}$ form.

এবার সেই গোলমেলে দ্বিতীয় limit-টার পালা।

Also, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 2a-3b$ and $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$. Shall show that

$$2a - 3b = 0. \qquad (1)$$

> ⟦ Because:
>
> Otherwise, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ exists (infinitely), $\because g'(x) = 15x^2 \to 0+$ as $x \to 0$.

প্যাঁচটা লক্ষ করলে? $g'(x)$-এর মধ্যে যে x-এর power-টা একটা even number (জোড় সংখ্যা) সেটা কাজে লাগাতে হল।

> Now $\because \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.
> $\therefore$ By L'Hôpital's rule,
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> is also ∞ or $-\infty(\Rightarrow\Leftarrow \because$ the limit is required to be $1.)$
>
> ⟧
>
> Thus,
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> has $\frac{0}{0}$ form.

দাঁড়াও এখনই কিন্তু ব্যস্ত হয়ে লিখে বোসো না যে $\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$, কারণ দ্বিতীয় limit-টা exist করে কি না সেটা আমরা এখনও জানি না। সুতরাং আপাততঃ তৃতীয় limit-টা পরীক্ষা করা ছাড়া পথ নেই। সেটা যে $\frac{0}{0}$ আকারের সেটা আমরা আগেই দেখেছিলাম--

> Also $\lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0} g''(x) = 0$. So
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$
>
> has $\frac{0}{0}$ form.

এবার চতুর্থ limit-টার পালা, সেটা কোনোভাবেই $\frac{0}{0}$ আকারের নয়, কারণ ওর denominator-এ আছে 30.

> Now
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-8a\cos 2x + 27b\cos 3x}{30} = \frac{-8a+27b}{30},$$
>
> which is finite.

এইবার আমরা প্রাণ ভরে L'Hôpital লাগাতে পারব--

> So by repeated application of L'Hôpital's rule,
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{-8a+27b}{30}.$$

Thus, by the given requirement,

$$\frac{-8a+27b}{30}=1. \tag{2}$$

Solving (1) and (2) we get

$$a=3, \quad b=2.$$

দ্যাখো, সব মিলিয়ে সমাধানটা কিন্তু ছোটো হয় নি। L'Hôpital লাগানোটা খুব কঠিন কিছু নয়, কিন্তু L'Hôpital যে আদৌ লাগানো যাবে সেটা দেখাতেই বেশী পরিশ্রম গেল। L'Hôpital লাগাতে গেলে এই অংকে এই পরিশ্রমটা অপরিহার্য। L'Hôpital মানে শর্ত-টর্ত কিছু পরীক্ষা না করে খালি ধুমধারাক্কা কিছু differentiate করে যাওয়া নয়!

এবার একই অংক আরেকভাবে করব। এবার আর L'Hôpital নয়, এবার আমরা Maclaurin's theorem লাগাব। এর জন্য আমাদের মনে রাখতে হবে $\sin x$-এর Maclaurin polynomial-এর চেহারাটা--

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + R_3(x) \text{ where } \frac{R_3(x)}{x^3}\to 0 \text{ as } x\to 0.$$

এটা যদি নতুন মনে হয় তবে মনে রেখো যে Lagrange's form ব্যবহার করে লিখতে পারি $R_3(x) = f^{(4)}(\xi_4)\frac{x^4}{4!}$, যেখানে $f(x)=\sin x$ আর ξ_4 হল 0 আর x-এর মাঝামাঝি কোনো সংখ্যা। সুতরাং $x\to 0$ হলে

$$\frac{R_3(x)}{x^3} = f^{(4)}(\xi_4)\frac{x}{4!}\to 0.$$

এবার x-এর জায়গায় $2x$ আর $3x$ বসিয়ে পাব--

$$\begin{aligned} & a\sin 2x - b\sin 3x \\ = \; & a\left[2x-\tfrac{8x^3}{3!}+R_3(2x)\right] - b\left[3x - \tfrac{27x^3}{3!}+R_3(3x)\right] \\ = \; & [2a-3b]x + \left[\tfrac{9b}{2}-\tfrac{4}{3}\right]x^3 + [aR_3(2x)-bR_3(3x)]. \end{aligned}$$

Now,

$$\frac{aR_3(2x)-bR_3(3x)}{x^3}=0,$$

Since $\frac{R_3(x)}{x^3}\to 0$. So by the given condition

$$\lim_{x\to 0}\frac{[2a-3b]x+\left[\frac{9b}{2}-\frac{4a}{3}\right]x^3}{5x^3}=1,$$

or

$$\lim_{x\to 0}\frac{[2a-3b]+\left[\frac{9b}{2}-\frac{4a}{3}\right]x^2}{5x^2}=1.$$

Clearly,

$$2a-3b=0, \tag{1}$$

because otherwise the limit is infinite. So

$$\frac{\left[\frac{9b}{2} - \frac{4a}{3}\right] x^2}{5x^2} = 1,$$

or

$$\tfrac{9b}{2} - \tfrac{4a}{3} = 5. \qquad (\mathbf{2})$$

Solving $(\mathbf{1})$ and $(\mathbf{2})$ we get

$$a = 3, \quad b = 2.$$

Exercise 34: Determine a, b, c such that

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(a + b\cos x) + c\sin x}{x^5} = \frac{1}{60}.$$

[3] ■

HINT:
এই অংকটার চেহারা দেখেই মনে হচ্ছে যে L'Hôpital দিয়ে করা যাবে। প্রথমে numerator আর denominator-এর একটা করে নাম দিয়ে নিই--

Let

$$\begin{aligned} f(x) &= x(a + b\cos x) + c\sin x \\ g(x) &= x^5. \end{aligned}$$

এখানে $g(x)$-এ x-এর power হল 5, তার মানে মোট পাঁচবার differentiate করতে হবে, তবে denominator-এর limit-টা nonzero হবে। গোড়াতেই derivative-এর তালিকাটা বানিয়ে রাখি--

Then

$$\begin{aligned} g'(x) &= 5x^4 \\ g''(x) &= 20x^3 \\ g^{(3)}(x) &= 60x^2 \\ g^{(4)}(x) &= 120x \\ g^{(5)}(x) &= 120, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f'(x) &= a + b(\cos x - x\sin x) + c\cos x \\ &= = a + (b+c)\cos x - bx\sin x \\ f''(x) &= -(b+c)\sin x - b(\sin x + x\cos x) \\ &= -(2b+c)\sin x - bx\cos x \\ f^{(3)}(x) &= -(2b+c)\cos x - b(\cos x - x\sin x) \\ &= -(3b+c)\cos x + bx\sin x \\ f^{(4)}(x) &= (3b+c)\sin x + b\sin x + bx\cos x \\ &= (4b+c)\sin x + bx\cos x \\ f^{(5)}(x) &= (5b+c)\cos x - bx\sin x. \end{aligned}$$

যেহেতু অংকটা পাঁচ ধাপ অবধি চলবে, তাই বার বার করে

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$$

জাতীয় জিনিস লিখতে হবে। এর একটা সংক্ষিপ্ত নাম দিয়ে রাখলে সুবিধা হবে--

Let

$$L_k = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

এবার আমাদের কার্যপদ্ধতি ঠিক করে নিই। আমরা দেখাব যে, $L_0, ..., L_4$ এদের সবারই $\frac{0}{0}$ form. কিন্তু L_5-টা দেখাই যাচ্ছে যে একটা finite সংখ্যা। সুতরাং আমরা বার বার করে L'Hôpital লাগিয়ে বলতে পারব যে $L_4, ..., L_0$ সবাই আসলে ওই একই finite সংখ্যা। এ থেকে অনেকগুলো equation পাব, যেগুলো সমাধান করলেই a, b, c বেরোনো উচিত। তাহলে দেখা যাক $L_0, ..., L_4$-এর মধ্যে কাদের চেহারা $\frac{0}{0}$ দেখানো সবচেয়ে সহজ।

Clearly L_0, L_2 and L_4 have the indeterminate $\frac{0}{0}$ form.

ঝামেলা হবে L_1 আর L_3 নিয়ে। এদেরকে কায়দা করে $\frac{0}{0}$-তে এনে ফেলতে হবে।

Now

$$\lim_{x\to a} f'(x) = a + b + c \text{ and } \lim_{x\to a} g'(x) = 0+.$$

কিরকম $0+$ লিখেছি দ্যাখো। ওটা লিখতে পেরেছি কারণ $g'(x)$-এর মধ্যে x-এর power-টা হল 4, একটা even number. এবার দেখাতে হবে $a + b + c = 0$.

Shall show that

$$a + b + c = 0. \qquad (1)$$

⟦ <u>Because:</u>

Otherwise, L_1 is infinite $(\because g'(x) \to 0+)$.
$\therefore$ By L'Hôpital's rule, L_0 is also infinite. $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

⟧

Thus L_1 has $\frac{0}{0}$ form.

এবার L_3-এর পালা--

Now

$$\lim_{x\to a} f'''(x) = -3b - c \text{ and } \lim_{x\to a} g'''(x) = 0+.$$

Shall show that

$$-3b - c = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

⟦ Because:

Otherwise, L_3 is infinite $(\because g'''(x) \to 0+)$.

$\therefore$ By L'Hôpital's rule, L_2, L_1, L_0 are also infinite $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

⟧

Thus L_3 has $\frac{0}{0}$ form.

ব্যস্, $L_0, ..., L_4$ সবাইকেই $\frac{0}{0}$ দেখিয়ে দিয়েছি। ডিনামাইট দিয়ে বিস্ফোরণ ঘটানোর জন্য যেমন লম্বা একটা পলতের একমাথায় ডিনামাইট রেখে অন্য মাথায় আগুন দেওয়া হয়, আমাদের কাজটাও কতকটা সেইরকম। পাঁচটা $\frac{0}{0}$ দিয়ে যেন একটা লম্বা পলতে তৈরী করেছি। এবার L_5-কে finite দেখালেই পলতেয় আগুন লাগবে, এবং L'Hôpital-এর দৌলতে সেটা L_0-র দিকে এগিয়ে যাবে, এবং বিস্ফোরণের থেকে a, b, c বেরিয়ে আসবে!

Now

$$L_5 = \frac{5b + c}{120},$$

which is finite.

So by repeated application of L'Hôpital's rule

$$L_4 = ... = L_0 = \frac{5b + c}{120}.$$

$\because L_0 = \frac{1}{60}$,

$$\therefore \frac{5b + c}{120} = \frac{1}{60}. \qquad \textbf{(3)}$$

Solving $\textbf{(1)}$,$\textbf{(2)}$ and $\textbf{(3)}$,

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -3.$$

<u>বিকল্প পদ্ধতি</u>

By Maclaurin expansion

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x),$$

where $\frac{R_4(x)}{x^4} \to 0$ as $x \to 0$.

Again,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + S_5(x),$$

where $\frac{S_5(x)}{x^5} \to 0$ as $x \to 0$. So

$$\begin{aligned} & x(a + b\cos x) + c\sin x \\ = \; & x\left[a + b\left(1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + R_4(x)\right)\right] \\ & +c\left(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + S_5(x),\right) \\ = \; & x\left[a + b - \tfrac{b}{2}x^2 + \tfrac{b}{24}x^4 + bR_4(x)\right] \\ & +c\left(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + S_5(x)\right) \\ = \; & (a+b+c)x - \left[\tfrac{b}{2} - \tfrac{c}{6}\right]x^3 + \left[\tfrac{b}{24} + \tfrac{c}{120}\right]x^5 \\ & + \left[bxR_4(x) + cS_5(x)\right]. \end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned} A &= a + b + c \\ B &= \tfrac{b}{2} - \tfrac{c}{6} \\ C &= \frac{b}{24} + \tfrac{c}{120}. \end{aligned}$$

Then the given limit is

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{Ax - Bx^3 + Cx^5}{x^5} + \frac{bxR_4(x) + cS_5(x)}{x^5}\right].$$

Now, the second limit is 0. So we have

$$\lim_{x\to 0}\frac{A - Bx^2 + Cx^4}{x^4} = \frac{1}{60}.$$

Clearly $A = 0$, because otherwise the limit is infinite.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{-Bx^2 + Cx^4}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-B + Cx^2}{x^2} = \frac{1}{60}.$$

Again, $B = 0$, because otherwise the limit is infinite.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{Cx^2}{x^2} = C = \frac{1}{60}.$$

So we have

$$\begin{aligned} A &= a+b+c=0 \\ B &= \tfrac{b}{2}-\tfrac{c}{6}=0 \\ C &= \frac{b}{24}+\tfrac{c}{120}=\frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Solving, we get

$$a=2, \quad b=1, \quad c=-3.$$

Exercise 35: If

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^x-b\cos x+ce^{-x}}{x\sin x}=2$$

then find values of a, b and c.[3] ■

HINT:

Let

$$\begin{aligned} f(x) &= ae^x-b\cos x+ce^{-x} \\ g(x) &= x\sin x. \end{aligned}$$

Given

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=2.$$

Now, $f(x), g(x)$ are both differentiable and $\lim_{x\to 0} g(x)=0$.
Also

$$\lim_{x\to 0} f(x)=a-b+c.$$

Again

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to 0} g(x) \quad [\because \text{both limits exist}] \\ &= 2\times 0=0. \end{aligned}$$

$$\therefore a-b+c=0. \qquad (\mathbf{1})$$

Thus the given limit has the indeterminate $\frac{0}{0}$ form.

Now

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^x + b\sin x - ce^{-x} \\ g'(x) &= x\cos x + \sin x. \end{aligned}$$

Here

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = a - c \text{ and } \lim_{x\to 0+} g'(x) = 0+.$$

$$\therefore a - c = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

⟦ Because:

If $a - c \neq 0$, then $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ must be ∞ or $-\infty$.
Hence L'Hôpital rule applies,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 2,$$

so

$$2 = \infty \text{ or } 2 = -\infty (\Rightarrow\Leftarrow).$$

⟧

Thus, we again have the indeterminate $\frac{0}{0}$ form.

Now

$$\begin{aligned} f''(x) &= ae^x - b\cos x + ce^{-x} \\ g''(x) &= 2\cos x - x\sin x. \end{aligned}$$

We have

$$\lim_{x\to 0+} f''(x) = a - b + c \text{ and } \lim_{x\to 0+} g''(x) = 2.$$

So

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{a-b+c}{2}.$$

Applying L'Hôpital's rule again

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

or

$$\frac{a+b+c}{2} = 2,$$

or

$$a+b+c=4. \qquad (\mathbf{3})$$

Solving (**1**), (**2**) and (**3**),

$$a=1, \quad b=2, \quad c=1.$$

DAY 16
L'Hôpital's rule (part 3)

16.1 Application 3: অন্যান্য indeterminate form

আমরা এতক্ষণ L'Hôpital দিয়ে খালি $\frac{0}{0}$ চেহারার limit বার করেছি। একই theorem দিয়ে কিন্তু $\frac{\infty}{\infty}$ বা $0\times\infty$ বা 0^0 বা ∞^∞ form-এর limit-ও বার করার চেষ্টা করা যায়। এর মধ্যে সবচেয়ে সোজা হল $\frac{\infty}{\infty}$ কেসটা। L'Hôpital's rule-এর একটা রূপ আছে (সেটা আমরা আজকে শেষের দিকে প্রমাণ করব) যেটা বলে যে $\frac{0}{0}$ নিয়ে যা যা করা যায়, $\frac{\infty}{\infty}$ নিয়েও ঠিক তাই করা যায়!

Exercise 36: Find $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$. ■

HINT:

Let $f(x)=\log x$ and $g(x)=x$.
Then $f(x), g(x)\to\infty$ as $x\to\infty$.

সুতরাং $\frac{\infty}{\infty}$ চেহারা।

Now

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

So by L'Hôpital's rule, the required limit is 0.

Exercise 37: Find the following limits. Here $p>0$.
(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^p}$, **(2)** $\lim_{x\to0+}x^p\log x$, **(3)** $\lim_{x\to0+}x(\log x)^p$, **(4)** $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}$, **(5)** $\lim_{x\to\infty}x^pe^{-x}$,
■

এবার একটা 0^0 চেহারার limit বার করি। এখানে আমরা এই কথাটা ব্যবহার করব-- যদি $a>0$ আর $b\in\mathbb{R}$ হয় তবে $a^b=e^{b\log a}$.

Exercise 38: Evaluate

$$\lim_{x\to1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

[2] ■

HINT:

$$\lim_{x\to 1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{t\to 0+} t^{\cos\frac{\pi(1-t)}{2}} \quad \left[\text{putting } t=1-x\right]$$
$$= \lim_{t\to 0+} t^{\sin\frac{\pi t}{2}}.$$

এবার সেই কায়দাটা--

Now $t^{\sin\frac{\pi t}{2}} = \exp\left[\sin\frac{\pi t}{2}\log t\right]$.

$\because \exp(\cdot)$ is a continuous function the required limit is

$$\exp\left[\lim_{t\to 0+}\sin\frac{\pi t}{2}\log t\right].$$

Now

$$\lim_{t\to 0+}\sin\frac{\pi t}{2}\log t = \lim_{t\to 0+}\frac{\log t}{\operatorname{cosec}\frac{\pi t}{2}}$$

লক্ষ কর আমাদের limit-টা ছিল $0\times\infty$ আকারের (কারণ $t\to 0+$ হলে $\sin\frac{\pi t}{2}\to 0$ আর $\log\to-\infty$. এটাকে আমরা $\frac{\infty}{\infty}$ রূপে এনে ফেললাম। চাইলে $\frac{0}{0}$ রূপেও পরিণত করতে পারতাম--$\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{1/\log t}$ কিন্তু $1/\log t$-কে differentiate করা সুবিধা হবে না, তাই $\frac{\infty}{\infty}$ রূপটাই ব্যবহার করলাম।

$\because \log t\to\infty$ and $\operatorname{cosec}\frac{\pi t}{2}\to\infty$ as $t\to 0+$,

$\therefore$ By L'Hôpital's rule,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\log t}{\operatorname{cosec}\frac{\pi t}{2}} = \lim_{t\to 0+}\frac{1/t}{-\operatorname{cosec}\frac{\pi t}{2}\cot\frac{\pi t}{2}}$$
$$= -\lim_{t\to 0+}\frac{\sin\frac{\pi t}{2}\tan\frac{\pi t}{2}}{t}$$
$$= -\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\sin\frac{\pi t}{2}\tan\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}} \quad \left[\because \text{taking } x=\frac{\pi t}{2}\ \ \frac{\sin x}{x}\to 1.\right]$$
$$= -\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0+}\tan\frac{\pi t}{2} = 0.$$

So the required limit is $e^0 = 1$.

এর পরের অংকটাও L'Hôpital-এরই অংক, যদিও প্রথম দর্শনে তা মনে হয় না।

Exercise 39: Evaluate

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x-\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}\right\}$$

where $a_1, a_2, ..., a_n$ are positive real numbers.[3] ■

HINT:

এখানে $a_1, ..., a_n$-এর positive হওয়ার কোনো দরকার নেই।

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty}\left\{x - \sqrt[n]{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}\right\} \\
= & \lim_{x\to\infty}\left\{x - x\sqrt[n]{\left(1-\tfrac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1-\tfrac{a_1}{x}\right)}\right\} \\
= & \lim_{x\to\infty} x\left\{1 - \sqrt[n]{\left(1-\tfrac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1-\tfrac{a_n}{x}\right)}\right\} \\
= & \lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{(1-a_1y)\cdots(1-a_ny)}}{y},
\end{aligned}
$$

where $y = \frac{1}{x}$.

Let $f(y) = 1 - \sqrt[n]{(1-a_1y)\cdots(1-a_ny)}$ and $g(y) = y$.

Then $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$.

Also $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$.

Now $g'(y) = 1$.

এবার $f'(y)$ বার করব। নীচের লাইন দুটো জটিল মনে হতে পারে। কিন্তু ভালো করে পড়ে দ্যাখো, প্রথম লাইনে খালি chain rule আর দ্বিতীয় লাইনে differentiation-এর product rule ব্যবহার করেছি।

$$
\begin{aligned}
f'(y) &= -\frac{1}{n}\prod_i(1-a_iy)^{\frac{1}{n}-1}\times\frac{d}{dy}\left[-a_i\prod_i(1-a_jy)\right] \\
&= -\frac{1}{n}\prod_i(1-a_iy)^{\frac{1}{n}-1}\times\sum_i\left[-a_i\prod_{j\neq i}(1-a_jy)\right].
\end{aligned}
$$

So

$$\lim_{y\to 0}\frac{f'(y)}{g'(y)} = \sum_i \tfrac{a_i}{n}.$$

Hence by L'Hôpital's rule the required limit is $\sum_i \frac{a_i}{n}$.

Exercise 40: Evaluate: $\lim_{x\to 0+}(\sin x)^x$.[2] ■

HINT:

Since for any $a > 0$ and $b \in \mathbb{R}$ we have $a^b = e^{b\log a}$, the limit is

$$\lim_{x\to 0+}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0+}\exp(x\log(\sin x)) = \exp(\lim_{x\to 0+} x\log(\sin x)),$$

since e^x is continuous.

Now

$$\lim_{x\to 0+} x\log(\sin x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sin x)}{1/x},$$

which has $-\infty/\infty$ form as

$$\lim_{x\to 0+} \underbrace{\log(\sin x)}_{f(x),\ \text{say}} = -\infty \text{ and } \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x),\ \text{say}} = \infty.$$

Now

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

and

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Also

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0+} x \times \frac{x}{\sin x} \times \cos x = 0\times 1\times 1 = 0.$$

So by L'Hôpital's rule

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Hence the required limit is $e^0 = 1$.

16.2 কখন L'Hôpital লাগানো যায় না

L'Hôpital's rule হল limit বার করার কায়দা। তার জন্য ব্যবহার করছি differentiation. এদিকে differentiation-এর সংজ্ঞাটা limit ব্যবহার করে তৈরী। ফলে পুরো ব্যাপারটা হল limit দিয়ে limit বার করার মত, এবং সেই কাজটা করতে গিয়ে কখনও সখনও গোল বাঁধে। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 10: হায়ার সেকণ্ডারীতে শিখেছিলে যে $\lim_{x\to 0}\frac{\sin}{x} = 1$. নিশ্চয়ই ভুলে গিয়েছো প্রমাণটা কি ছিল। দেখে মনে হচ্ছে যে এখানে খুব সহজেই L'Hôpital's rule লাগানো যায়, কারণ এটা $\frac{0}{0}$ আকারে আছে। সুতরাং

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

ঠিক যেমনটা প্রত্যাশা করা গিয়েছিল। কিন্তু এটাকে কি একটা প্রমাণ বলা যায়?
SOLUTION: উত্তর হল, না, এখানে একটা মস্ত গলদ আছে। এই যে তুমি $\sin x$-কে differentiate করে $\cos x$ পেলে, সেটা কি করে এসেছে? তার প্রমাণটা একটু মনে করে নিই--

$$\tfrac{d\sin x}{dx} = \lim_{h\to 0} \tfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cdots = \sin x \lim_{h\to 0} \tfrac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \tfrac{\sin h}{h}.$$

মাঝের ওই ডট্ ডট্ জায়গাটায় আমরা $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$ লাগিয়েছি। এর পর আমাদের কাজ হল limit দুটো কষে দেখানো যে প্রথম limit-টা শূন্য আর দ্বিতীয় limit-টা হল 1. এখানে দ্বিতীয় limit-টা হল $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$. তার মানে দ্যাখো $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ বার করার জন্য আমরা $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ ব্যবহার করে বসে আছি। দুটো তো আসলে

একই জিনিস! ঠিক যেন এক সাহেব নতুন বাংলা শিখছে, তোমাকে এসে জিজ্ঞাসা করল "কুকুর" মানে কি? তুমি গম্ভীর মুখে বললে--"কুকুর" মানে "সারমেয়"। সাহেব থতমত খেয়ে বলল--আর "সারমেয়" মানে কি? তুমি আরও গম্ভীরমুখে জবাব দিলে--"সারমেয়" মানে হল "কুকুর"। তুমি যে ভুল বলছ এমন নয়, কিন্তু সাহেবের তাতে জ্ঞানবৃদ্ধি হচ্ছে না! এরকম "যুক্তি"কে বলে circular argument. অংকের প্রমাণে এরকম "যুক্তি" অচল। ঠিক সেই কারণেই এখানে L'Hôpital's rule লাগালে সেটা প্রমাণ বলে গ্রাহ্য হবে না! ■

তবে এরকম ঝামেলার উদাহরণ বিরল। যখনই এই সমস্যা আসে, তখনই সাধারণতঃ অংকটা L'Hôpital ছাড়াই এমনিভাবেই সহজে করে ফেলা যায়। নীচে এরকম দুটো উদাহরণ দিলাম।

Exercise 41: Evaluate:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+1}\right)^{3x+1}.$$
[2] ■

HINT:
অংকটায় $3x$ আর $3x+1$-এর ছড়াছড়ি দেখে অনুমান করছি যে $y=3x+1$ নিলে সুবিধা হবে--

> Putting $y=3x+1$ we have $y\to\infty \iff x\to\infty$. So the given limit is the same as
> $$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^y=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^y.$$

এখানে আমরা একটা power-এর limit বার করছি যেখানে y-টা উপর নীচ দুই জায়গাতেই আছে। এরকম ক্ষেত্রে exp আর log-এ ভেঙে নিলে সুবিধা হয়। মনে রেখো যে $\exp(x)$হল e^x-এর আরেক নাম।

> Since for any $a>0$ and $b\in\mathbb{R}$ we have $a^b=e^{b\log a}$, the limit is
> $$\lim_{y\to\infty}\exp\left[y\log\left(1-\frac{1}{y}\right)\right]=\exp\left[\lim_{y\to\infty}y\log\left(1-\frac{1}{y}\right)\right],$$
> since e^x is a continuous function. Putting $z=\frac{1}{y}$ we have $z\to 0+ \iff y\to\infty$. So
> $$\lim_{y\to\infty}y\log\left(1-\frac{1}{y}\right)=\lim_{z\to 0+}\frac{\log(1-z)}{z}=-1.$$

এইটা কি করে পেলাম। হায়ার সেকণ্ডারীতে যে কয়টা “standard limit” শিখেছিলে (বা, বলা ভালো, মুখস্থ করেছিলে) এটা ছিল তাদের অন্যতম। কিন্তু এটা হয় কেন? এটা একটা $0/0$ চেহারার limt, সুতরাং L'Hôpital লাগানোর লোভ হতেই পারে। লাগালে ঠিক উত্তরই বেরোবে, কিন্তু সেটা সঠিক যুক্তি হবে না। কারণ L'Hôpital লাগানোর জন্য তোমাকে $\log(1-z)$-এর derivative জানতে হবে। কিন্তু লক্ষ করে দ্যাখো যে সেই derivative-টা আসলে $\lim_{z\to 0}\frac{\log(1-z)}{z}$ নিজেই! তাই আমরা L'Hôpital লাগানোর চেষ্টা না সরাসরি differentiate করব, এইভাবে--

> ⟦ Because:
>
> If $f(z) = \log(1-z)$ then $f'(z) = -\frac{1}{1-z}$.
> So $f'(0) = -1$.
> Thus
> $$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\log(1-z)}{z} = -1.$$
> ⟧
>
> Thus the required limit is e^{-1}.

Exercise 42: Evaluate

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{1/x}.$$

[3] ■

HINT:

> Since for any $a > 0$ and $b \in \mathbb{R}$ we have $a^b = e^{b\log a}$, the limit is
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{1/x} &= \lim_{x\to 0+} \exp\left[\tfrac{1}{x}\log\left(\tfrac{2^x+3^x}{2}\right)\right] \\ &= \exp\left[\lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x}\log\left(\tfrac{2^x+3^x}{2}\right)\right],\end{aligned}$$
> because e^x is a continuous function.

এখানে $\frac{\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)}{x}$-এর limit বার করতে হবে, যেটা $0/0$ আকারের। কিন্তু এখানেও L'Hôpital লাগানোটা সঠিক যুক্তি হবে না, খালি একটা differentiation-ই যথেষ্ট।

> Let $f(x) = \log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)$.
> Then $f'(x) = \frac{2}{2^x+3^x} \times \frac{1}{2}(2^x\log 2 + 3^x \log 3)$.
> So $f'(0) = \frac{\log 2+\log 3}{2}$, ie,
> $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\log 2+\log 3}{2}.$$
> Now $f(0) = 0$. So in particular,
> $$\lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x}\log\left(\tfrac{2^x+3^x}{2}\right) = \frac{\log 2+\log 3}{2}.$$

Hence the required limit is

$$\exp\left(\frac{\log 2 + \log 3}{2}\right) = \sqrt{6}.$$

DAY 17
L'Hôpital's rule-এর প্রমাণ

L'Hôpital's rule-এর নানারকম সংস্করণ আছে, কোনোটায় $\frac{0}{0}$ নিয়ে কাজ হয়, কোনোটায় $\frac{\infty}{\infty}$ নিয়ে। কোনো সংস্করণে আমরা $x \to a-$ ব্যবহার করি, কোনোটায় $x \to a+$ বা $x \to a$. কোনোটায় $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$-কে একটা real number হতে হয়, কোনোটায় সেটা ∞ বা $-\infty$ হতে পারে। তবে সৌভাগ্যক্রমে বেশীরভাগ ক্ষেত্রেই প্রমাণের মূল যুক্তি একইরকম। তাই আমরা খালি তিনটে সংস্করণ ধরে ধরে প্রমাণ করব, সেগুলোকে সামান্য রদবদল করলেই বাকীদের প্রমাণ পেয়ে যাবে।

17.1 $\frac{0}{0}$ form

প্রমাণের খুঁটিনাটির মধ্যে যাওয়ার আগে মোটামুটি কারণটা বুঝে রাখি। ধরো $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$ আমরা Cauchy's mean value theorem করেছিলাম, মনে আছে? তার মূল বক্তব্যটা ছিল $f(x), g(x)$ দুটো উপযুক্ত function হলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{*}$$

যেখানে ξ হল x আর y-এর মাঝখানে কিছু একটা সংখ্যা। এবার যদি আমরা y-কে a-র খুব কাছে নিয়ে যাই (x-কে স্থির রেখে), তবে $f(y) \approx 0$ আর $g(y) \approx 0$ হবে। তার মানে

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \approx \frac{f(x)}{g(x)}$$

হবে। ফলে (*) থেকে

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

হবে। এবার যদি x-কে a-র খুব কাছে নিয়ে যাই, তবে ξ-ও a-র খুব কাছে চলে যাবে (কারণ x, y দুজনেই a-র খুব কাছে, আর ξ রয়েছে ওদের মাঝখানে কোথাও)। তাই

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

হবে।

যা বললাম সেটা অবশ্যই rigourous নয়, অর্থাৎ অনেক ফাঁক থেকে গেছে যেগুলো সূক্ষ্ম অংকের নিরিখে ধোপে টিকবে না। আমরা এবার যাবতীয় খুঁটিনাটিসুদ্ধ প্রমাণটা করব। কিন্তু তখন এই মূল ধারণাটা মাথায় রাখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

L'Hôpital's rule

Let a be any number and $f(x), g(x)$ be two functions such that

- $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$,
- $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$

Then
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Proof:

To show $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$,
i.e.,
Target $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \in N(\ell, \epsilon)$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আমাদের একটা উপযুক্ত $\delta > 0$ পেতে হবে। এর জন্য আমাদের দু দিকে চোখ খোলা রাখতে হবে। এক, $(a, a+\delta)$-র মধ্যে যেন $\frac{f'(x)}{g'(x)}$-টা যেন ℓ-এর খুব দূরে না থাকে। আর দুই, যেন $(a, a+\delta)$-র মধ্যে কোথাও $g(x) = 0$ হয়ে না যায় (তাহলে আর $\frac{f(x)}{g(x)}$ নিয়ে কাজ করতে পারব না)।

$\because \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

$$\therefore \exists h > 0 \quad \forall x \in (a, a+h) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \in N\left(\ell, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

এর ফলে $(a, a+h)$-এর মধ্যে $\frac{f'(x)}{g'(x)}$-টা ℓ-এর থেকে বেশী দূরে থাকতে পারবে না। এবার অন্যদিকটার ব্যবস্থা করি, মানে $g(x) = 0$ যেন না হয়ে যায় সেটা দেখি। তারজন্য প্রথমে লক্ষ কর যে $x \in (a, a+h)$ হলে $g'(x) \neq 0$ হতে বাধ্য, কারণ নইলে আর $f'(x)/g'(x)$করলাম কি করে?

$\because \frac{f'(x)}{g'(x)}$ is defined for every $x \in (a, a+h)$,
$\therefore \forall x \in (a, a+h) \quad g'(x) \neq 0$.
So by Darboux's theorem, either $g'(x) > 0$ or $g'(x) < 0$ over $(a, a+h)$.

এই জায়গাটা সাবধানে বুঝে নাও। এমন কি হতে পারে যে কোনো $x_1 \in (a, a+h)$-এর জন্য $g'(x_1) > 0$ অথচ অন্য কোনো $x_2 \in (a, a+h)$-এর জন্য $g'(x_2) < 0$? না, কারণ তাহলে Darboux's theorem থেকে x_1, x_2-র মাঝখানে কোথাও এমন একটা $x_3 \in (a, a+h)$ পেয়ে যাব যাতে $g'(x_3) = 0$ হয়ে যাবে। কিন্তু সেটা যে কেন হতে পারে না সেটা তো বললামই।
এতক্ষণ $g'(x)$-কে নিয়েই নাড়াচাড়া করছিলাম। এবার সেখান থেকে $g(x)$-এর বিষয়ে কি সিদ্ধান্ত করা যায় দেখি--

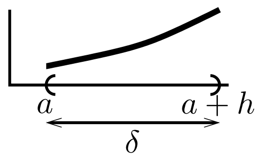


Fig 11

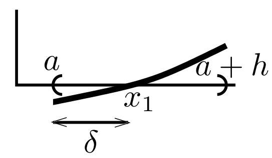


Fig 12

So $g(x)$ is strictly monotone (and hence one-one) on $(a, a+h)$.
$\therefore$ Either $g(x)$ is never 0 in $(a, a+h)$ or there is exactly one $x_1 \in (a, a+h)$ where $g(x_1) = 0$.

এই দুটো সম্ভাবনা দেখানো রয়েছে Fig 11 আর Fig 12-তে।

$\boxed{\exists\delta}$ In the first case, choose $\delta = h > 0$. In the second case, choose $\delta = x_1 - a$.
$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in (a, a+\delta)$.

আমরা δ-টা এমনভাবে নিয়েছি যাতে $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ থাকে ℓ-এর কাছাকাছি। এবার দেখাব যে $\frac{f(x)}{g(x)}$ আর $\frac{f'(x)}{g'(x)}$-এর মধ্যে দূরত্ব খুব বেশী হতে পারে না। তাহলে $\frac{f(x)}{g(x)}$-টাও ℓ-এর কাছে থাকতে বাধ্য।

Now by Cauchy's mean value theorem, $\forall y \in (a, x)$

$$(f(x) - f(y))g'(\xi) = (g(x) - g(y))f'(\xi),$$

for some $\xi \in (y, x)$.

এবার আমরা দুইপাশকে $g(x) - g(y)$ দিয়ে ভাগ করে দেব। কিন্তু তার আগে দেখে নিই কেন $g(x) - g(y) = 0$ হতে পারে না--

$\because g(x)$ is one-one on $(a, a+h)$ and $x, y \in (a, a+h)$,
$\therefore g(x) \neq g(y)$.

$$\therefore \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

$\because \xi \in (y, x) \subseteq (a, a+\delta)$

$$\therefore \tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \in N\left(\ell, \tfrac{\epsilon}{2}\right)$$

Letting $y \to a+$ we see that

$$\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \to \tfrac{f(x)}{g(x)} \in \left[\ell - \tfrac{\epsilon}{2}, \ell + \tfrac{\epsilon}{2}\right] \subseteq N(\ell, \epsilon),$$

as required.

[Q.E.D]

Exercise 43: এখানে আমরা "$x \to a+$"-র বদলে "$x \to a-$" নিয়েও কাজ করতে পারতাম। সেক্ষেত্রে প্রমাণটা একই থাকত, খালি $(a, a+\delta)$-র জায়গায় $(a-\delta, a)$ নিতে হত। নতুন প্রমাণটা একবার লিখে ফেলো দেখি। তাহলে ধাপগুলো মনে ভালো করে গেঁথে যাবে। ■

Exercise 44: আমরা "$x \to a+$"-র বদলে "$x \to a$" নিয়েও কাজ করতে পারতাম। সেক্ষেত্রে প্রমাণটা কি রকম হত? ■

Exercise 45: আমরা "$x \to a+$"-র বদলে "$x \to \infty$" বা "$x \to -\infty$"-ও নিতে পারতাম। সেক্ষেত্রে প্রমাণটা কোথায় বদলাত? ■

L'Hôpital's rule

Let a be any number and $f(x), g(x)$ be two functions such that

- $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$,
- $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$

Then

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Proof: এই প্রমাণটা একেবারেই আগের প্রমাণটার মতই--

To show $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$,

i.e.,

Target $\quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \in (M, \infty)$.

আগের প্রমাণের $N(\ell, \epsilon)$-এর জায়গায় এখানে (M, ∞). তাছাড়া বলতে গেলে আর কোনোই তফাত নেই।

$\forall M$

Take any $M > 0$. $\because \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$,

$$\therefore \exists h > 0 \quad \forall x \in (a, a+h) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \left(\frac{M}{2}, \infty\right).$$

এর ফলে $(a, a+h)$-এর মধ্যে $\frac{f'(x)}{g'(x)}$-টা $\frac{M}{2}$-এর নীচে নামতে পারবে না। এবার আবার আগের প্রমাণটার মতই Darboux-র শরণাপন্ন হব।

Then, by Darboux's theorem, $g'(x) > 0$ or $g'(x) < 0$ over $(a, a+h)$.
So $g(x)$ is strictly monotone (and hence one-one) on $(a, a+h)$.
$\therefore$ Either $g(x)$ is never 0 in $(a, a+h)$ or there is exactly one $x_1 \in (a, a+h)$ where $g'(x_1) = 0$.

$\boxed{\exists\delta}$ In the first case, choose $\delta = h > 0$. In the second case, choose $\delta = x_1 - a$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in (a, a+\delta)$.

Now by Cauchy's mean value theorem, $\forall y \in (a, x)$

$$(f(x) - f(y))g'(\xi) = (g(x) - g(y))f'(\xi),$$

for some $\xi \in (y, x)$.
$\because g(x)$ is one-one on $(a, a+h)$ and $x, y \in (a, a+h)$,
$\therefore g(x) \neq g(y)$.

$$\therefore \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

$\because \xi \in (y, x) \subseteq (a, a+\delta)$

$$\therefore \tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \in \left(\tfrac{M}{2}, \infty\right)$$

Letting $y \to a+$ we see that

$$\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \to \tfrac{f(x)}{g(x)} \in \left[\tfrac{M}{2}, \infty\right) \subseteq (M, \infty),$$

as required.

[Q.E.D]

17.2 $\frac{\infty}{\infty}$ form

পড়ে আছে খালি $\frac{\infty}{\infty}$ কেসটা। মজার কথা হল আসলে কিন্তু উপরনীচ দুজায়গাতেই ∞ থাকার দরকার নেই। খালি নীচে থাকাই যথেষ্ট। নীচের theorem-টা সেইভাবেই লেখা। এর প্রমাণটা বেশ জটিল। দরকার হলে বাদ দিয়ে যেতে পারো। আসলে এখানে একটা নতুন প্যাঁচ আছে--আমরা প্রথম খণ্ডে sequence শেখার সময়ে $\liminf$ আর $\limsup$-এর কথা শিখেছিলাম। Sequence-দের মত function-দেরও $\liminf, \limsup$ হয়। যেমন ধর $F(x)$ কোনো function হলে $\liminf_{x\to a+} F(x)$ মানে হল

$$\liminf_{x\to a+} F(x) = \lim_{h\to 0+} \left(\inf\{F(x) \ : \ x \in (a, a+h)\}\right).$$

একইভাবে

$$\limsup_{x\to a+} F(x) = \lim_{h\to 0+} \left(\sup\{F(x) \ : \ x \in (a, a+h)\}\right).$$

ঘাবড়ে যেও না, দেখতে বিদঘুটে হলেও এরা কিন্তু সাধারণ limit-এর চেয়েও ভালোমানুষ। সাধারণ limit-এর বেলায় যোগ,বিয়োগ,গুণ,ভাগ ইত্যাদি যা যা নিয়ম খাটে এদের বেলাতেও সব কিছুই একইরকম। খালি সাধারণ limit সবসময়ে exist নাও করতে পারে, কিন্তু এরা exist করবেই (finite বা infinite হতে পারে)। আর যদি $\liminf = \limsup$ হয় তবেই খালি সাধারণ limit-টা exist করবে। ব্যস্ খালি এটুকু মনে রাখলেই চলবে, বিদঘুটে সংজ্ঞাদুটো ভুলে গেলেও আপত্তি নেই!

L'Hôpital's rule

Let a be any number and $f(x), g(x)$ be two functions such that

- $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$,
- $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$

Then

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Proof:

To show $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$,

$\liminf, \limsup$-এ ভেঙে লিখি-- এটাকে

i.e., $\liminf_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$,

এবার একটা ছোট্টো কৌশল। বল তো এমন কোনো সংখ্যা x আছে, যাতে $\forall \epsilon > 0 \quad x \in N(\ell, \epsilon)$ হয়? উত্তর হল এরকম একটাই সংখ্যা আছে, $x = \ell$. তাই

"$x = \ell$" আর "$\forall \epsilon > 0 \quad x \in N(\ell, \epsilon)$"

আসলে সমার্থক! সেই কৌশলটা খাটিয়ে আমরা নীচের লাইনটা পেয়েছি--

i.e.,
Target $\quad \forall \epsilon > 0 \quad \liminf\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}, \in N(\ell, \epsilon)$ and $\limsup\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \in N(\ell, \epsilon)$.

এইটা নিতান্তই একটা কৌশল, ভেবে বার করা খুবই কঠিন। যাই হোক, এর পরের কয়েকটা লাইন মোটামুটি আগের প্রমাণগুলোর পথেই এগোবে।

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

$$\therefore \exists \eta > 0 \quad \forall x \in (a, a+\eta) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \in N\left(\ell, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

In particular $g'(x) \neq 0$ over $(a, a+\eta)$. So $g(x)$ is one-one over $(a, a+\eta)$.
$\because |g(x)| \to \infty$ as $x \to a+$,

$$\therefore \exists c \in (a, a+\eta) \quad \forall x \in (a, c) \quad g(x) \neq 0.$$

Now by Cauchy's mean value theorem,

$$\forall x \in (a, c) \quad \exists \xi \in (x, c) \quad (f(c) - f(x))g'(\xi) = (g(c) - g(x))f'(\xi).$$

$\therefore \frac{f(c)-f(x)}{g(c)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, since $g(x) \neq g(c)$, as g is one-one on $(a, a+\eta)$.
$\because \xi \in (x, c) \subseteq (a, a+\eta)$

$$\therefore \frac{f(c)-f(x)}{g(c)-g(x)} \in N\left(\ell, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

So

$$\frac{\frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{g(c)}{g(x)} - 1} \in N\left(\ell, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

এরপর আবার $\liminf, \limsup$ আসবে।

Taking $\liminf_{x \to a+}$,

$$\liminf_{x \to a+} \frac{\frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{g(c)}{g(x)} - 1} \in \left[\ell - \frac{\epsilon}{2}, \ell + \frac{\epsilon}{2}\right] \subseteq N(\ell, \epsilon).$$

ie, $\because |g(x)| \to \infty$,

$$\liminf_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \in N(\ell, \epsilon).$$

এইখানে কি করলাম বলি। যখন x-টা ডানদিক থেকে a-র খুব কাছে চলে আসবে, তখন $|g(x)|$ খুব বড় হবে, ফলে $f(c)/g(x)$ এবং $g(c)/g(x)$ দুজনেই 0-র খুব কাছে চলে আসবে। সুতরাং পড়ে থাকবে খালি $f(x)/g(x)$.

Similarly, taking $\limsup_{x \to a+}$,

$$\limsup_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \in N(\ell, \epsilon),$$

as required.

[Q.E.D]

Answers

3. 1, $1+x$, $1+x+\frac{x^2}{2}$, $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}, \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!}$.
4. 1, $1-\frac{x^2}{2}$, $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}, \sum_{k=0}^{50}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. **5.** $1+x+x^2$, $1+x+x^2$.
10. 0-র যে কোনো neighbourhood-এই $f(x)$ positive আর negative দুরকম value-ই নেয়। **16.** $\frac{1}{n}$
24. Undefined. **37.** **(1)** 0 **(2)** 0 **(3)** 0 **(4)** 0 **(5)** 0 **44.** একই প্রমাণ, খালি $(a, a+\delta)$-র জায়গায় $N'(a, \delta)$. **45.** $(a, a+\delta)$-র জায়গায় (M, ∞) বা $(-\infty, -M)$.

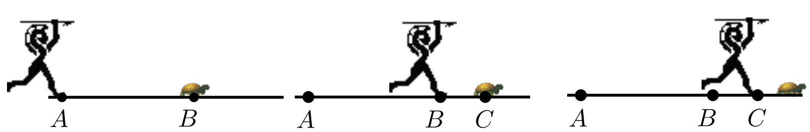
Chapter IV
Infinite series (part 1)

DAY 18
ভূমিকা

অংক করতে গিয়ে অনেক সময়ে আমরা এমন অনেক সমস্যার সম্মুখীন হই, যেগুলো দেখে মনে হয় যেন দুইভাবে সমাধান করা যায়, কিন্তু দুটো সমাধানের দুটো আলাদা উত্তর আসে। অথচ সমস্যাটা হয়তো এমন যে তার খালি একটাই উত্তর সম্ভব। তার মানে দুটো সমাধানপদ্ধতির অন্ততঃ একটা ভুল, কিন্তু সহজ বুদ্ধিতে দুটোকেই ঠিক মনে হচ্ছে। এরকম সমস্যাকে বলে paradox (প্যারাডক্স)। পরীক্ষার খাতায় পড়লে paradox যথেষ্ট দুঃখের কারণ হতে পারে, কিন্তু পরীক্ষার বাইরে paradox থেকে অনেক মজার খোরাক মেলে। গণিতশাস্তরের একেকটা নতুন শাখার জন্ম হয় অনেক সময়ে কোনো paradox-এর ব্যাখ্যা করতে গিয়েই। আমরা এই অধ্যায়ে যে বিষয়টা শিখব সেটাই এর একটা ভালো উদাহরণ। Paradox-গুলো বেশ মজাদার, তাই কয়েকটা নমুনা দিই।

প্রাচীন কালে গ্রীসে একিলিস নামে একজন বীর ছিলেন যিনি ভয়ানক জোরে দৌড়তে পারতেন। প্রথম paradox-টা তাঁর নামে প্রচলিত। মনে কর একিলিস একদিন দেখলেন পথের উপর খানিক দূরে একটা কচ্ছপ গুট্‌গুট্‌ করে হেঁটে যাচ্ছে (Fig 1). একিলিস সেটাকে ধরবেন বলে তাড়া করলেন। কচ্ছপটাও অমনি একিলিসের দিকে পিছন ফিরে ছোটোছোটো পা ফেলে পালাতে লাগল। প্রশ্ন হল একিলিস কি কোনোদিন কচ্ছপটাকে ধরতে পারবেন? এই প্রশ্নটার আমরা দুইভাবে সমাধান করব। এক সহজ বুদ্ধিতে--একিলিস খুব জোরে ছুটতে পারেন, আর কচ্ছপটা তার চেয়ে অনেক কম দ্রুত বেগে এগোচ্ছে। অতএব অবশ্যই এক সময়ে কচ্ছপভায়া একিলিসের কাছে ধরা পড়বেন। জেনো (Zeno) নামের একজন পণ্ডিত ছিলেন (এই paradox-টা আসলে তাঁরই মস্তিষ্কপ্রসূত), তিনি আরেকটা সমাধান দিয়ে "প্রমাণ" করে দিলেন যে, একিলিস যত বড় দৌড়বীরই হোন না কেন, কচ্ছপটাকে ধরা তাঁর সাধ্যের বাইরে। জেনোর যুক্তি এইরকম--ধরো শুরুতে একিলিস আছেন A বিন্দুতে আর কচ্ছপটা আছে B বিন্দুতে। একিলিস দৌড়ে যতক্ষণে B বিন্দুতে পৌঁছবেন, ততক্ষণ কচ্ছপটা তো আর ধরা দেবার জন্য বসে নেই, সে গুট্‌গুট্‌ করে সামান্য হলেও এগিয়ে C বিন্দুতে পৌঁছে গিয়েছে। এবার একিলিস যতক্ষণে C অব্‌ধি পৌঁছবেন, ততক্ষণে কচ্ছপভায়া আরো একটু এগিয়ে গিয়েছেন (খুব অল্প একটু, কিন্তু তাও কিছুটা তো বটে)। এই একই ব্যাপারই বারবার চলতে থাকবে, তাই একিলিসের আর কচ্ছপ ধরা হবে না। বুঝতে অসুবিধা হয় না, যে এখানে প্রথম সমাধানটাই ঠিক, কিন্তু দ্বিতীয় সমাধানটার ভুলটা তাহলে কোথায়? এই ধরণের paradox-এর সমাধান করতে গিয়েই infinite series বিষয়টার সৃষ্টি, যেটা আমরা এখানে শিখতে চলেছি।

Fig 1



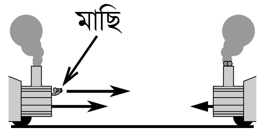


Fig 2

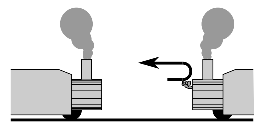


Fig 3

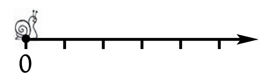


Fig 4

এই প্রসঙ্গে একটা ছেলে-ঠকানো প্রশ্ন মনে পড়ল, যেটা তোমরা হয়তো ছোটোবেলার কোনো অংক বইতে দেখে থাকবে। দুটো ট্রেন আসছে মুখোমুখি (Fig 2)। একটার গতি ঘন্টায় 200 km, অন্যটার 100 km. ওদের মধ্যে এই মুহূর্তে দূরত্ব মাত্র 5 km. বুঝতেই পারছ শীঘ্রই একটা সাংঘাতিক দুর্ঘটনা হতে চলেছে। আমাদের অবশ্য তা নিয়ে কোনো মাথা ব্যথা নেই, আমাদের যাবতীয় দুশ্চিন্তা একটা মাছিকে নিয়ে, যেটা একটা আশ্চর্য কায়দায় আত্মহত্যার পরিকল্পনা এঁটেছে। মাছিটা ঘন্টায় 600 km বেগে উড়তে পারে। এই মুহূর্তে সেটা প্রথম ট্রেনের ইঞ্জিন থেকে অন্য ট্রেনের ইঞ্জিনের দিকে উড়তে শুরু করেছে। ওই ইঞ্জিনে পৌঁছনোমাত্র সে বোঁ-ও করে ঘুরে গিয়ে ফের প্রথম ট্রেনের দিকে ফিরে আসবে (Fig 3), পৌঁছেই আবার বোঁ-ও করে দ্বিতীয় ইঞ্জিনের দিকে ছুটবে, এইভাবেই উড়তেই থাকবে উড়তেই থাকবে যতক্ষণ না ট্রেনদুটো দড়াম করে পরস্পরকে ধাক্কা মারার সময়ে মাছিটাকে পিষে ফেলবে। প্রশ্ন হল এই অনিবার্য করুণ পরিণতির আগে মাছিটা মোট কত দূরত্ব উড়বে? এর সহজ সমাধানটা এই রকম--ট্রেনদুটো পরস্পরকে ধাক্কা মারবে $5/(100+200) = 1/60$ ঘন্টা পরে। ততক্ষণ মাছিটা টানা উড়েছে, তার মানে মোট উড়েছে $600/60 = 10$ km. এবার আমি জেনোর কায়দায় একটা অন্য সমাধান দিচ্ছি, এর ভুলটা কোথায় বল-- মাছিটা দুটো ট্রেনের চেয়েই দ্রুত যায়। সুতরাং দুটো ট্রেনের মধ্যে সংঘর্ষের আগেই মাছিটা অন্য ট্রেন পৌঁছে যাবে, ফেরা পথেও একই যুক্তি খাটবে, সংঘর্ষের আগেই ও প্রথম ট্রেনের দিকে ফিরে আসবে। একই ভাবে সংঘর্ষের আগেই ও আবার দ্বিতীয় ট্রেনে পৌঁছে নির্বিঘ্নে ফিরেও আসবে। এইভাবে চলতেই থাকবে, ফলে ওর ওড়া কোনো দিনই শেষ হবে না!
এই দুটো paradox-এরই নিরসন হবে এই অধ্যায়ের infinite series শেখার পর। অবশ্য তুমি মনে করতেই পারো যে, খামোখা অত কষ্ট করব কেন? সহজ বুদ্ধিতে যেটা বোঝা যাচ্ছিল দুই ক্ষেত্রেই তো সেটাই ঠিক দেখা যাচ্ছে, আমরা আদৌ জটিল সমাধানগুলো নিয়ে মাথা ঘামাব কেন? ঠিক কথা, এই দুটো উদাহরণেই সহজ বুদ্ধির সমাধানটাই ঠিক হয়েছে। কিন্তু সব সময়েই তা হয় না। এবার একটা উদাহরণ দিই যেখানে সহজ বুদ্ধির সমাধানটা বেমালুম ভুল (যদিও সেটা প্রমাণ করার পরও বিশ্বাস হওয়া শক্ত)!
একটা 1 মিটার লম্বা রাবার ব্যাণ্ড আছে। একটা শামুক এর ওপর চড়ে একপ্রান্ত থেকে অন্য প্রান্তে যাবার চেষ্টা করছে (Fig 4). শামুকরা ধীরস্থির প্রাণী, মিনিটে মাত্র 1 সেন্টিমিটার এগোয়। ঠিক এক মিনিটের মাথায় আমরা রাবার ব্যাণ্ডটাকে টেনে আরও 1 মিটার বাড়িয়ে দিলাম (মানে এখন মোট দৈর্ঘ্য দাঁড়াল $1+1=2$ মিটার)। শামুকটা যেহেতু ব্যাণ্ডের গায় লেপ্টে বসে রয়েছে, ফলে টান খেয়ে সেটাও সামান্য খানিকটা এগিয়ে গেল। পরের মিনিটে আবার শামুকটা ব্যাণ্ড বেয়ে আরো 1 সেন্টিমিটার এগোলো। তার পর ফের ব্যাণ্ডটাকে টেনে আরও 1 মিটার বাড়িয়ে দেওয়া হল। এইভাবে চলতে লাগল। শামুকটা সব সময়েই ব্যাণ্ড বেয়ে মিনিটে 1 সেন্টিমিটার করে এগোয়, আর প্রতি মিনিটের মাথায় ব্যাণ্ডটাকে টেনে তার দৈর্ঘ্য 1 মিটার করে বাড়িয়ে দেওয়া হয়। প্রশ্ন হল শামুকটা কি কোনো দিনই ব্যাণ্ডের অন্য প্রান্তে পৌঁছবে? সহজ বুদ্ধি নিশ্চয়ই বলছে যে, সেটা অসম্ভব! এবার আর জটিল বুদ্ধির (সঠিক) সমাধানটা এখানেই বলব না, সেটা যথা সময়ে আত্মপ্রকাশ করবে!

18.1 Definition

আমরা এবার infinite series-এর সংজ্ঞা শিখব। কি করতে চলেছি বোঝার জন্য আবার সেই একিলিসের কচ্ছপ তাড়া করার উদাহরণটা ভাবো। ধরো একিলিসের velocity (গতিবেগ) হল V আর কচ্ছপটার velocity হল v $(< V)$. যদি শুরুতে ওদের দূরত্ব হয় d_1, তবে একিলিস B-তে পৌঁছবে $\frac{d_1}{V}$ সময় পরে। এর নাম দিলাম ধর t_1,

$$t_1 = \frac{d_1}{V}.$$

এর মধ্যে কচ্ছপটা এগিয়ে যাবে vt_1 দূরত্ব (একে বলি d_2). তবে সেই d_2 দূরত্ব অতিক্রম করতে একিলিসের সময় লাগবে

$$t_2 = \frac{d_2}{V} = t_1 \times \frac{v}{V}.$$

এই সময়ে কচ্ছপটা এগিয়ে যাবে $d_3 = vt_2$ দূরত্ব, আর সেটা পার করতে একিলিসের সময় লাগবে আরও

$$t_3 = \frac{d_3}{V} = t_1 \left(\frac{v}{V}\right)^2.$$

এইভাবে ব্যাপারটা চলতেই থাকবে, সুতরাং মোট সময় লাগবে

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots = t_1 + t_1\left(\frac{v}{V}\right) + t_1\left(\frac{v}{V}\right)^2 + \cdots.$$

এদিকে সহজ বুদ্ধিতে আমরা জানি যে, মোট সময় লাগার কথা

$$\frac{d_1}{V-v},$$

কারণ কচ্ছপটার সাপেক্ষে একিলিসের relative velocity হল $V - v$. তার মানে এই paradox-এর নিরসন তখনি হবে যদি কোনোভাবে দেখাতে পারি যে,

$$t_1\left[1 + \frac{v}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{d_1}{V-v}.$$

এই অবধি এসে হয়তো তুমি চিনে ফেলেছো যে বাঁদিকের সংখ্যাগুলো একটা GP-তে রয়েছে। হাইস্কুলে সাধারণতঃ এই কথাটা বলা থাকে যে, $-1 < r < 1$ হলে

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} \qquad (*)$$

হয়। কেন হয়, কি করে হয় এসব অবশ্য হাইস্কুলে বলা হয় না, এবং ছাত্ররা সাধারণতঃ অন্ধের মত এই কথাটা মুখস্থ করে রাখে। এই কথাটা যদি এখানে আমরা অন্ধের মতই আমাদের ক্ষেত্রে লাগিয়ে দিই তবে

$$t_1\left[1 + \frac{v}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \cdots\right] = t_1 \times \frac{1}{1 - \frac{v}{V}} = \frac{d_1}{V-v},$$

যেহেতু $t_1 = \frac{d_1}{V}$. ঠিক এটা দেখানোই আমাদের দরকার ছিল। এখানে GP-টার common ratio হল $r = \frac{v}{V}$. যেহেতু একিলিস কচ্ছপটার চেয়ে জোরে ছোটেন, তাই $0 < r < 1$.

এতে paradox-টার একরকম নিরসন হল বটে, কিন্তু ওই অন্ধের মত মুখস্থ করা (*)-টা লাগিয়ে। এবার আমরা পুরো অংকটা বুঝে বুঝে করব, এবং সেটা করতে গিয়ে (*)-টা কোথা থেকে এসেছে সেটাও জানা হয়ে যাবে।

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে সমস্যাটার উৎস হল বাঁদিকের ওই ডট্ ডট্গুলো। ওতে বোঝা যাচ্ছে যে infinitely many (অসংখ্য) সংখ্যা যোগ করা হচ্ছে। কিন্তু infinitely many সংখ্যা যোগ করার মানে কি? এত দিন পর্যন্ত আমরা যা যা যোগ করেছি তাতে কখনও অসংখ্য জিনিস যোগ করতে হয় নি। সুতরাং এটা একটা নতুন জিনিস, একেই বলে--infinite series.

DEFINITION: Infinite series

Let $\{a_n\}_n$ be any (infinite) sequence of real numbers. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

is called an infinite series.

এটা খালি একটা নতুন নাম দেওয়া হল, কি করে যোগটা সত্যিই করতে হবে তার হদিশ পাওয়া গেল না। সেই কায়দাটা এবার শিখি। একিলিসের অংকটা আমরা ধাপে ধাপে করছিলাম। প্রথম ধাপটা পার করতে একিলিসের সময় লেগেছিল

$$t_1,$$

দ্বিতীয় ধাপের জন্য লেগেছিল

$$t_2 = t_1 \times \tfrac{v}{V},$$

তৃতীয় ধাপের জন্য

$$t_3 = t_1 \times \left(\tfrac{v}{V}\right)^2.$$

এইভাবে চলতে চলতে n-th ধাপের জন্য লাগবে

$$t_n = t_1 \times \left(\tfrac{v}{V}\right)^{n-1}.$$

তার মানে n ধাপ পর্যন্ত মোট সময় লাগছে

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = t_1\left[1 + \tfrac{v}{V} + \left(\tfrac{v}{V}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{v}{V}\right)^{n-1}\right].$$

এইটার একটা নাম দিই--S_n. আমরা GP-র যোগফল বার করার কায়দা জানি। সেটা লাগিয়ে--

$$S_n = t_1 \frac{1-\left(\frac{v}{V}\right)^n}{1-\frac{v}{V}} = \frac{d_1}{V} \times \frac{1-\left(\frac{v}{V}\right)^n}{1-\frac{v}{V}},$$

কারণ $t_1 = \frac{d_1}{V}$.
এবার দেখি n যত বাড়ছে তত S_n কিভাবে বদলাচ্ছে। লক্ষ কর যে $0 < v < V < 1$, মানে $0 < \frac{v}{V} < 1$. তাই $n \to \infty$ হলে $\left(\frac{v}{V}\right)^n \to 0$. অতএব--

$$S_n = \frac{d_1}{V} \times \frac{1-\left(\frac{v}{V}\right)^n}{1-\frac{v}{V}} \to \frac{d_1}{V}\frac{1-0}{1-\frac{v}{V}} = \frac{d_1}{V-v}.$$

লক্ষ কর যে ঠিক উত্তরটাই আমরা সহজ বুদ্ধিতে পেয়েছিলাম। এ থেকেই আন্দাজ করা যাচ্ছে যে, $\sum_{k=1}^\infty a_k$-এর সংজ্ঞা হওয়া উচিত এইরকম--প্রথমে আমরা সবগুলো a_k-কে যোগ না করে খালি প্রথম n-খানাকে যোগ করব। এর নাম দেব S_n, মানে

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

যেমন

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \text{ ইত্যাদি।} \end{aligned}$$

এই S_n-কে বলে $\sum_{k=1}^\infty a_k$ series-টার n-th partial sum. তারপর S_n-এর limit নিতে হবে যখন $n \to \infty$. এই limit-টাকেই বলব infinite series-টার sum (যোগফল)।
অবশ্য এতে একটা সমস্যা আছে, যদি limit-টা না থাকে তবে কি করব? সেক্ষেত্রে বলব যে infinite series-টাকে যোগ করা যায় না।
লক্ষ কর $\sum_{k=1}^\infty a_k$ series-টার থেকে দুটো sequence পাওয়া যায়--এক, term-গুলোর sequence $\{a_n\}_n$, আর দুই, partial sum-গুলোর sequence $\{S_n\}_n$. এদের মধ্যে $\{S_n\}_n$ sequence-টার ভূমিকা বেশী।

মনে আছে আশা করি যে, কোনো sequence চার রকমের হতে পারে-- convergent, divergent to ∞, divergent to $-\infty$ বা oscillating. এখানে $\{S_n\}_n$ এর মধ্যে কোন দলে পড়ে সেই অনুযায়ী একটা infinite series -ও চার রকমের হতে পারে।
$\{S_n\}_n$ sequence-টা converge করলে আমরা বলি যে $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge করে। আবার $S_n \to \infty$ হলে বলি $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. একইভাবে $\{S_n\}_n$ যদি oscillate করে তবে বলব যে $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oscillate করে।
এই কথাগুলোই নীচের definition-গুলোতে বিস্তারিতভাবে বলা হয়েছে।

DEFINITION: **Convergence/divergence/oscillation**

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be any infinite series and let $\{S_n\}_n$ be the sequence of its partial sums.

- if $S_n \to \ell$ for some $\ell \in \mathbb{R}$, then we say that $\sum a_n$ converges to ℓ and write $\sum a_n = \ell$.
- if $S_n \to \infty$ (or $-\infty$), then we say that $\sum a_n$ diverges to ∞ (or $-\infty$), and write $\sum a_n = \infty$ (or $-\infty$).
- if $\{S_n\}_n$ oscillates, then we say that $\sum a_n$ oscillates.

এদের মধ্যে convergent-রা সবচেয়ে ভদ্র, divergent to ∞, divergent to $-\infty$ হলে তাও মন্দের ভালো, আর oscillating হলে সবচেয়ে বিচ্ছিরি।

Example 1: Let $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ and $a_{2n} = -\frac{1}{n}$. Then find the sequence of partial sums. Hence show that $\sum a_n = 0$.
SOLUTION: এখানে series-টা হল এরকম দেখতে--

$$1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + - + - \cdots .$$

প্রথম কয়েকটা partial sum বার করি--

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 - 1 = 0 \\ S_3 &= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \\ S_4 &= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

বুঝতেই পারছ যে, $S_1, S_3, S_5, \ldots$ ইত্যাদি $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ করে 0-র দিকে যাচ্ছে। আর $S_2, S_4, S_6, \ldots$ ইত্যাদিরা সবাই 0. তাই

$$S_{2n-1} = \tfrac{1}{n}, \quad S_{2n} = 0.$$

ফলে $S_{2n-1} \to 0$ এবং $S_{2n} \to 0$. যেহেতু যে কোনো integer-ই হয় even (জোড়) নয় odd (বিজোড়), তাই $S_n \to 0$. সুতরাং $\sum a_n = 0$. ■

Exercise 1: Let $\{b_n\}_n$ be any sequence. Let $a_{2n-1} = b_n$ and $a_{2n} = -b_n$. Then show that $\sum a_n = 0$ if and only if $b_n \to 0$. ■

Exercise 2: Let $\{a_n\}_n$ be such that $\sum a_{2n}$ and $\sum a_{2n-1}$ both converge. Then must $\sum a_n$ converge too? ■

18.2 কিছু গুরুত্বপূর্ণ কথা

এবার কয়েকটা জিনিস শিখব যেগুলো খুব কঠিন কিছু নয়, কিন্তু ভীষণ দরকারী।

18.2.1 $\{a_n\}_n$ আর $\{S_n\}_n$-এর সম্পর্ক

যেকোনো infinite series $\sum a_n$-এর সঙ্গে দুটো sequence জড়িত থাকে--$\{S_n\}_n$ আর $\{a_n\}_n$. এর একটা জানলেই অন্যটা বার করা যায়। $\{a_n\}_n$ থেকে কি করে $\{S_n\}_n$ বার করতে হয় সে তো জানিই--

$$S_n = a_1 + \cdots a_n.$$

যদি $\{S_n\}_n$ দিয়ে দেয় তবে $\{a_n\}_n$ বার করতে পারি এইভাবে--

$$a_1 = S_1, \quad a_2 = S_2 - S_1, \quad a_3 = S_3 - S_2, \cdots .$$

তার মানে এক কথায় বলতে গেলে $a_n = S_n - S_{n-1}$. খালি $n = 1$-এর বেলায় একটু সমস্যা আছে, কারণ তখন $S_{n-1} = S_0$ এসে যাবে। তাই সাধারণতঃ আমরা define করে নিই $S_0 = 0$. তাহলে লিখতে পারি

$$\forall n \geq 1 \quad a_n = S_n - S_{n-1}.$$

এই কথাটা নীচের theorem-টা প্রমাণ করতে কাজে লাগবে। এই theorem-টা অত্যন্ত দরকারী জিনিস।

THEOREM

If $\sum a_n$ converges then $a_n \to 0$.

Proof:

Let

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ a_1 + \cdots + a_n & \text{if } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Given that $\sum a_n$ converges,

ie, $S_n \to L$ for some $L \in \mathbb{R}$.

এবার আমরা a_n-এর limit বার করার চেষ্টা করব। আমরা জানি যে $a_n = S_n - S_{n-1}$. তাই $\lim_n S_n$ আর $\lim_n S_{n-1}$ বার করতে পারলেই হবে। বলাই আছে যে $\lim_n S_n = L$. এবার লক্ষ কর যে $\lim_n S_{n-1}$-ও আসলে L-ই হবে, কারণ $n \to \infty$ হওয়া আর $n - 1 \to \infty$ হওয়া একই ব্যাপার।

$$\therefore \lim_n S_{n-1} = \lim_m S_m = L,$$

where $m = n - 1$.

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} \to L - L = 0,$ as required.

[Q.E.D]

এই ছোট্টো theorem-টার বিষয়ে কয়েকটা কথা বলা দরকার। প্রথমতঃ, $\sum a_n$ converge করলে যে $a_n \to 0$ হবে সেটা কিন্তু সহজ বুদ্ধিতেই বোঝা যায়। তুমি infinitely many সংখ্যা a_n যোগ করে চলেছ, অথচ যোগফলটা দিব্যি finite থাকছে, সেটা একমাত্র তখনই সম্ভব যদি a_n-গুলো ক্রমশঃই ছোটো হতে হতে 0-র কাছাকাছি চলে যায়।
Theorem-টা কি বলছে ভালো করে লক্ষ কর--

$$\sum a_n \text{ converges } \implies a_n \to 0.$$

অনেক ছাত্র ভুল করে ভেবে বসে যে উল্টোদিকটাও ঠিক, তা কিন্তু নয়--

$$a_n \to 0 \implies \sum a_n \text{ converges } \text{(একেবারে ভুল!!!!)}.$$

আমরা শীঘ্রই এমন অনেক উদাহরণ দেখব যেখানে $a_n \to 0$ কিন্তু $\sum a_n$ মোটেই converge করে না!

Exercise 3: নীচের কথাগুলোর মধ্যে কোনটা কোনটা ঠিক, আর কোনটা কোনটা ভুল?

1. $\sum a_n = \infty \implies a_n \not\to 0.$
2. $a_n \not\to 0 \implies \sum a_n$ does not converge.
3. $a_n \not\to 0 \implies \sum a_n = \infty.$

■

মনে আছে হয়তো যে এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে necessary আর sufficient বলে দুটো কথা শিখেছিলে। যদি A আর B দুটো শর্ত হয় যাতে

$$A \implies B$$

তবে আমরা বলি "A is sufficient for B." আবার এও বলতে পারি যে "B is necessary for A." এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা কর তো!

Exercise 4: "$a_n \to 0$" শর্তটা কি $\sum a_n$-র convergence-এর জন্য necessary? না কি sufficient? ■

Exercise 5: Show that the following series cannot converge.
(1) $\sum \frac{3^n}{2^n+3^n}$ **(2)** $\sum \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ **(3)** $\sum \left(\sqrt{n^2+10}-n\right)$ **(4)** $\sum \left(\sqrt[3]{n^3+3}-n\right)$
■

নীচের অংকটা দেখতে ভয়ানক, কিন্তু আসলে একদম সোজা।

Exercise 6: Examine the convergence of the following infinite series:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + \cdots.$$

[3] ■

HINT:

> We have a series of positive terms. So it either converges to a number or diverges to ∞.
>
> Here the general term is $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{t_n}$, (for $n \geq 0$) where
>
> $$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$
>
> So $t_n \to \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ as $n \to \infty$.
>
> Thus $a_n \to \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \neq 0$.
>
> Hence the given series diverges to ∞.

সোজাই ছিল অংকটা, খালি একটা কথা মাথায় রেখো। আমরা প্রথমে দেখালাম যে general term-টা 0-তে যায় না। তা থেকে এটা বলা যায় যে series-টা converge করতে পারে না। এ থেকেই কিন্তু অমনি বলে দেওয়া যায় না যে series-টা ∞-তে diverge করে। সেটার জন্য এই তথ্যটা কাজে লাগল যে term-গুলো সব positive ছিল। সেই কথাটা সমাধানের গোড়াতেই লিখে নিয়েছিলাম।

18.2.2 Series of positive terms

আমরা আগেই বলেছি যে $\sum a_n$-এর আচরণ সম্পূর্ণভাবে নির্ধারিত হয় তার partial sum-এর sequence $\{S_n\}_n$-এর দ্বারা। এখন $\{S_n\}_n$ চাররকমের হতে পারে--convergent, divergent to ∞, divergent to $-\infty$, আর oscillating. এর মধ্যে oscillating-রা হল সবচেয়ে ঝামেলাজনক। কিন্তু প্রথম খণ্ডে এক ধরণের sequence-এর কথা শিখেছিলাম, যারা কখনও oscillating হতে পারে না--monotone sequence. সেই কারণে monotone sequence-দের নিয়ে কাজ করা অনেক সোজা। লক্ষ কর যদি a_n-রা সবাই positive হয়, তবে $\{S_n\}_n$ একটা monotone increasing sequence হবে, কারণ--

$$S_n - S_{n-1} = a_n > 0.$$

সেই কারণে positive term-ওয়ালা infinite series-দের নিয়ে কাজ করতে সুবিধা হয়। এরা হয় converge করে নয় তো ∞-তে diverge করে, আর কোনো কিছু করতে পারে না।

> **THEOREM**
>
> If $a_n > 0$ then either $\sum a_n$ converges or it diverges to ∞. Accordingly we write
>
> $$\sum a_n < \infty \text{ or } \sum a_n = \infty.$$

আচ্ছা, যদি a_n-রা সবাই negative হত তবে কি হত? সেক্ষেত্রেও $\{S_n\}_n$ একটা monotone sequence হত--monotone decreasing. তবে সেই ক্ষেত্রটা আমরা আলাদা করে আলোচনা করি না, কারণ সব a_n-ই যদি negative হয়, তবে মাইনাস চিহ্নটাকে "কমন" নিয়ে $\sum$-এর বাইরে নিয়ে এলেই ভিতরের term-গুলো সব positive হয়ে যায়। যেমন $a_n < 0$ হলে $b_n = -a_n > 0$ হবে, তাই

$$\sum a_n = \sum(-b_n) = -\sum b_n.$$

ব্যস্ এবার $\sum b_n$ নিয়ে কাজ করলেই হবে, এর সব term-ই positive.

Exercise 7: Examine the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ where U_n is defined by

$$U_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{if } n \text{ even} \\ 5^n & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$$

■

HINT:

> The general term does not converge to 0, since the subsequence
>
> $$u_{2n-1} = 5^{2n-1} \to \infty.$$
>
> Since the series has only positive terms, it diverges to infinity.

এখানে positive term-এর দরকার কোথায় হল বুঝলে তো? যদি positive আর negative দুরকম term-ই থাকত, তবে জোর দিয়ে বলতে পারতাম না যে ∞-তে diverge করে। সে ক্ষেত্রে $-\infty$-তেও diverge করতে পারত, বা oscillate-ও করতে পারত।

18.2.3 Cauchy criterion

$\sum a_n$ converge করা মানে $\{S_n\}_n$-এর convergence. যেহেতু $\{S_n\}_n$ হল একটা real number-এর sequence, তাই $\{S_n\}_n$ converges if and only if $\{S_n\}_n$ is a Cauchy sequence. এটা আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম। চট্ করে মনে করে নিই $\{S_n\}_n$ একটা Cauchy sequence হওয়া মানে কি--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |S_n - S_m| < \epsilon. \tag{*}$$

এইটাকে a_n-দিয়ে গুছিয়ে লেখা যায়। লক্ষ কর যে $m < n$ হলে

$$S_n - S_m = a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

যেমন

$$\begin{aligned} S_6 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \therefore S_6 - S_3 &= \qquad\qquad a_4 + a_5 + a_6. \end{aligned}$$

সুতরাং (*)-কে আমরা এইভাবেও লিখতে পারি--

Cauchy criterion

A series $\sum a_n$ is convergent iff

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \ (m < n) \quad |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon.$$

18.2.4 মাথার চেয়ে লেজের দাম বেশী

আমাদের সব মাথাব্যথা হল $\lim_{n\to\infty} S_n$ নিয়ে। যেহেতু $n \to \infty$ তাই গোড়ার S_n-গুলো নিয়ে আমরা কেয়ার করি না। সেই কারণে গোড়ার a_n-গুলোও আমাদের কাছে ভীষণ জরুরী কিছু নয়। গোড়ার কয়েকটা term বদলে গেলেও $\sum a_n$-এর আচরণ (convergence বা divergence বা oscillate করা) বদলাবে না। ধরো একটা series নিলাম

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

এর partial sum-এর sequence-টার নাম দিলাম $\{S_n\}_n$. এবার ধরো series-টার প্রথম দুটো term-কে বদলে b_1 আর b_2 করে দিলাম--

$$b_1 + b_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

এই নতুন series-টার partial sum-এর sequence-টাকে যদি $\{T_n\}_n$ বলি তবে এর সঙ্গে $\{S_n\}_n$-এর সম্পর্কটা এইরকম--

$$\begin{aligned}
T_1 &= b_1 &&= (b_1 - a_1) + S_1\\
T_2 &= b_1 + b_2 &&= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + S_2\\
T_3 &= b_1 + b_2 + a_3 &&= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + S_3\\
T_4 &= b_1 + b_2 + a_3 + a_4 &&= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + S_4, \text{ ইত্যাদি।}
\end{aligned}$$

তার মানে লক্ষ কর, গোড়ার T_1 আর T_2 বাদ দিলে

$$T_n = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + S_n, \quad n \geq 3. \qquad (**)$$

তাই $\{T_n\}_n$ আর $\{S_n\}_n$-এর আচরণ একইরকম হবে--একজন converge করলে অন্যজনও করবে, একজন diverge করলে অন্যজনও করবে, একই কথা oscillate করার ক্ষেত্রেও বলা যায়। তবে একটা কথা, $\{S_n\}_n$ আর $\{T_n\}_n$ দুজনেই একসঙ্গে converge করলেও limit কিন্তু এক নাও হতে পারে। (**)-এর দুইপাশে limit নিলেই বুঝবে যে $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)$ অংশটা থেকেই যাবে--

$$\lim_{n\to\infty} T_n = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \lim_{n\to\infty} S_n.$$

গোড়ার দিকের finite-সংখ্যক term বাদ দিলেও একটা infinite series-এর আচরণ বদলায় না বলেই আমরা নিশ্চিন্তে $\sum a_n$ লিখে থাকি, $\sum$-টা কোথা থেকে শুরু হচ্ছে তা নিয়ে মাথা ঘামাই না। তাই $\sum a_n$ মানে আসলে

$$\sum_{n=\text{ কিছু একটা}}^{\infty} a_n.$$

এই "কিছু একটা"-টা বিভিন্ন অংকে বিভিন্ন হতে পারে, তাতে মূল যুক্তি পাল্টাবে না।

DAY 19
Comparison test (inequality form)

Infinite series-এর সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হল একটা series দেখে বলতে পারা সেটা converge করে কি না। এই কাজের জন্য অন্যতম হাতিয়ার comparison test. এর জন্য দুটো জিনিস জানতে হয়--প্রথমতঃ, গোটা দুয়েক standard series যাদের convergence বা divergence সরাসরি দেখানো যায়। আর দ্বিতীয়তঃ, কয়েকটা compare (তুলনা) করার কায়দা, যাতে এই standard series-গুলোর কাছাকাছি দেখতে কোনো series দিলে আমরা তুলনা করে চট্ করে বলতে পারি যে সেটা converge করবে অথবা diverge করবে। তবে সাবধান, comparison test কিন্তু খালি positive term-ওয়ালা series-এর ক্ষেত্রেই খাটে।

19.1 Some standard series

প্রথমে আমরা দুই ধরণের standard series-এর সঙ্গে পরিচিত হয়ে নিই।

19.1.1 Geometric series

সবচেয়ে সহজ হল geometric series. একটা geometric series কি রকম হবে-- convergent নাকি divergent নাকি oscillating, সেটা নির্ভর করে series-টার common ratio-র উপরে। ধরো common ratio-টা হল r. যদি $|r| < 1$ হয় তবে series-টা converge করবে। যদি $r \geq 1$ হয় তবে diverge করবে, আর $r \leq -1$ হলে oscillate করবে। Comparison test-এর জন্য অবশ্য আমাদের খালি $r > 0$ নিয়ে কাজ করতে হবে, কারণ comparison test খালি positive term-ওয়ালা series-এর জন্যই প্রযোজ্য।

Geometric series

$$\sum_{0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{if } |r| < 1 \\ \infty & \text{if } r \geq 1 \end{cases}$$

If $r \leq -1$ then the series oscillates.

Proof: প্রমাণ অতি সংক্ষিপ্ত--

> Here the n-th partial sum is
>
> $$S_n = r^0 + r^1 + \cdots + r^n.$$

যদি $r = 1$ হয় তবে সবচেয়ে সহজ--

> If $r = 1$ then
>
> $$S_n = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ times}} = n \to \infty.$$
>
> If $r \neq 1$, then
>
> $$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$
>
> Now
>
> $$r^{n+1} \to \begin{cases} 0 & \text{if } |r| < 1 \\ \infty & \text{if } r > 1 \end{cases}$$

আমরা তিনটে কেস দেখে ফেলেছি--এক, $r = 1$, দুই, $-1 < r < 1$, আর তিন, $r > 1$. পড়ে আছে $r \leq -1$ কেসটা। ধরো যদি $r = -2$ হয় তবে $r^{n+1} = (-2)^{n+1}$ oscillate করবে--$-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$ একই কথা যেকোনো $r \leq -1$-এর ক্ষেত্রেই খাটে--

> Also $\{r^{n+1}\}_n$ oscillates if $r \leq -1$.
>
> Hence the result.

[Q.E.D]

Exercise 8: নীচের series-গুলোর মধ্যে কারা convergent, কারা divergent বল। Convergent series-গুলোর sum বার কর।
(1) $\sum_1^\infty 2^n$ **(2)** $\sum_1^\infty 2^{-n}$ **(3)** $\sum_0^\infty \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$ **(4)** $\sum_0^\infty 5^n 3^{-n}$ **(5)** $\sum_0^\infty 0.1^{2n}$ **(6)** $\sum_9^\infty \left(\frac{1}{3}\right)^{n-10}$
■

19.1.2 $\sum \frac{1}{n^p}$

আরেক ধরণের series আছে যাদের সঙ্গে পরিচয় থাকা ভালো, এদের চেহারা হল

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p},$$

যেখানে $p \in \mathbb{R}$ কোনো একটা সংখ্যা। যেমন $p = 1$ হলে series-টা হবে $\sum \frac{1}{n}$, আবার $p = \frac{3}{2}$ হলে হবে $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$. এরকম series-এর ক্ষেত্রে p-এর value থেকে বলে দেওয়া যায় যে series-টা converge করবে না কি diverge করবে। যদি $p \leq 1$ হয়, তবে diverge করবে, নইলে converge করবে।

THEOREM

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \begin{cases} = \infty & \text{if } p \leq 1 \\ < \infty & \text{if } p > 1 \end{cases}$$

এই theorem-টা আমরা এই অধ্যায়ের শেষে গিয়ে প্রমাণ করব। আপাততঃ theorem-টা খালি মনে রাখলেই চলবে। আর মনে রেখো যে $\sum \frac{1}{n}$-কে বলে **harmonic series.** **Example 2:** এই দুটো series-এর মধ্যে কে convergent আর কে divergent– $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$.
SOLUTION: দুটোরই আকার $\sum \frac{1}{n^p}$. প্রথম ক্ষেত্রে $p = 1 (\leq 1)$ তাই divergent. দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $p = \frac{3}{2} (> 1)$, তাই convergent. ■

Exercise 9: নীচের series-গুলোর মধ্যে কারা convergent, কারা divergent বল।
(1) $\sum \frac{1}{n^2}$ **(2)** $\sum \frac{1}{n^3}$ **(3)** $\sum \frac{1}{n^{-2}}$ **(4)** $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ **(5)** $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ **(6)** $\sum \frac{1}{n^{1.1}}$
■

এই অধ্যায়ের গোড়ায় শামুকের paradox-টা বলেছিলাম মনে আছে? যে শামুকটা রাবার ব্যাণ্ড বেয়ে মিনিটে 1 সেন্টিমিটার করে এগোয়, আর ব্যাণ্ডটাকে প্রতি মিনিটের শেষে টেনে 1 মিটার করে বাড়িয়ে দেওয়া হয়? প্রশ্ন ছিল শামুকটা কোনোদিন ব্যাণ্ডের অন্য মাথায় পৌঁছবে কি না। এমনিতে মনে হয় যেন পৌঁছবে না। এবার অংক কষে দেখি। মনে করো ব্যাণ্ডটার গায় স্কেলের মত দাগ কাটা আছে (Fig 5). শামুকটা প্রথম মিনিটের শেষে 1 সেন্টিমিটারের দাগটায় পৌঁছবে। এইবার ব্যাণ্ডটাকে যেই টেনে 2 মিটার করে দেওয়া হবে, তখন প্রতিটা সেন্টিমিটার দাগের মধ্যে দূরত্ব হবে 2 সেন্টিমিটার করে। কিন্তু শামুকটা তো ঠিক 1 সেন্টিমিটারই এগোবে 1 মিনিটে, তাই দ্বিতীয় মিনিটের শেষে সে পৌঁছবে $1 + \frac{1}{2}$ সেন্টিমিটারের দাগে। এবার যেই ব্যাণ্ডটাকে টেনে 3 মিটার করে দেওয়া হবে, তখন প্রতিটা সেন্টিমিটার দাগের মধ্যে দূরত্ব হবে 3 সেন্টিমিটার করে। সুতরাং



Fig 5

তৃতীয় মিনিটের পরিশ্রমে শামুকটা এগোবে $\frac{1}{3}$ দাগ পরিমাণ, মানে তৃতীয় মিনিটের শেষে ওর অবস্থান $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ দাগে। বুঝতেই পারছ যে এইভাবে n মিনিটে শামুকটা অতিক্রম করবে

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

দূরত্ব। আমরা জানি যে $\sum\frac{1}{n}=\infty$, সুতরাং এক সময়ে না এক সময়ে $S_n \geq 100$ হবেই, তার মানে শামুকটা 100 সেন্টিমিটার পার করে ব্যাঙের অন্য প্রান্তে পৌঁছে যাবে! বিশ্বাস হচ্ছে না? হওয়া শক্ত!

19.2 লেজ মোটা হওয়ার সমস্যা

আমরা আগেই শিখেছিলাম যে $\sum a_n$ যদি converge করে তবে $a_n \to 0$ হতে বাধ্য। তার কারণ ছিল এই যে, infinitely many a_n যোগ করেও যখন finite sum পাচ্ছি, তার মানে a_n-গুলো নিশ্চয়ই খুব ছোটো হতে হতে 0-র দিকে যাচ্ছে। এটাও বলেছিলাম যে, উল্টো কথাটা সবসময়ে সত্যি নয়, মানে $a_n \to 0$ হলেও $\sum a_n$ converge নাও করতে পারে। এরকম একটা উদাহরণ হল $\sum\frac{1}{n}$. এখানে $\frac{1}{n}\to 0$ কিন্তু $\sum\frac{1}{n}=\infty$. এমনটা হবার কারণ কি? কারণ এই যে, এখানে $\frac{1}{n}$-গুলো ছোটো হতে হতে 0-র দিকে যাচ্ছে বটে, কিন্তু যথেষ্ট তাড়াতাড়ি ছোটো হচ্ছে না।
এর সঙ্গে তুলনা কর $\sum\frac{1}{n^2}$-এর। এখানেও $\frac{1}{n^2}\to 0$. এবার কিন্তু $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$. কারণ $\frac{1}{n^2}$ অনেক তাড়াতাড়ি 0-র দিকে যাচ্ছে। Fig 6-এর তালিকা আর গ্রাফটা দেখলেই বুঝবে $\frac{1}{n^2}$ কত দ্রুত ছোটো হচ্ছে $\frac{1}{n}$-এর চেয়ে।
Term-গুলোর sequence-টাকে মনে করা যায় যেন series-টার লম্বা লেজ। লেজটা ক্রমশঃই সরু হচ্ছে। লেজটা যত সরু হবে (মানে a_n যত দ্রুত ছোটো হয়ে 0-র দিকে যাবে) ততই $\sum a_n$-এর পক্ষে converge করা সহজ হবে। সেই কারণে "লেজ মোটা" series-দের পক্ষে converge করা কঠিন। অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখি।
ধরো $\sum a_n$ আর $\sum b_n$ হল দুটো positive term-ওয়ালা series. আমরা বলব যে $\sum b_n$-এর চেয়ে $\sum a_n$-এর লেজ মোটা যদি

$$\exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\geq N\quad a_n\geq b_n$$

হয়। এখানে ওই "$\exists N\in\mathbb{N}$" অংশটা লিখেছি কারণ গোড়ার finitely many term নিয়ে আমাদের মাথা ব্যথা নেই। একটা সময়ের পর থেকে $a_n \geq b_n$ হলেই আমরা খুশী। Fig 7 দ্যাখো।
যদি $\sum a_n<\infty$ হয়, তবে বুঝতেই পারছ যে $\sum b_n<\infty$ হতে বাধ্য। ঘুরিয়ে বললে, $\sum b_n=\infty$ হলে $\sum a_n=\infty$ হবেই। এইটাই হল আমাদের প্রথম comparison test. এটাকে বলে comparison test-এর inequality form. পরে

Fig 6

n	$1/n$	$1/n^2$
1	1	1
10	0.1	0.01
100	0.01	0.0001

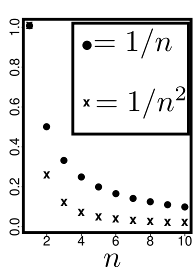
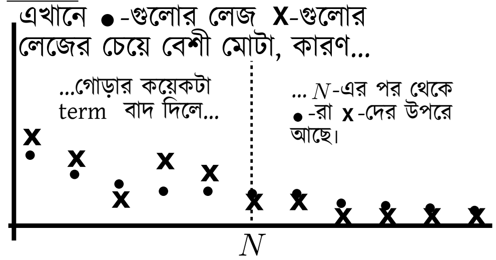


Fig 7



আরেকটা সংস্করণ শিখব, তাকে বলে limit form.

Comparison test (inequality form)

If $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \geq b_n > 0$ then

- $\sum a_n < \infty \implies \sum b_n < \infty$,
- $\sum b_n = \infty \implies \sum a_n = \infty$.

Proof: আমরা খালি প্রথম অংশটুকু প্রমাণ করব, তা থেকেই আপনা আপনি দ্বিতীয় অংশটা প্রমাণ হয়ে যাবে (কি করে বল তো!)। প্রথম অংশে দেখাতে হবে $\sum b_n < \infty$, মানে partial sum-এর sequence-টা converge করে।

> First part: Let $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

আমরা জানি যে b_k-রা সবাই positive হওয়ায় $\{T_n\}_n$ একটা increasing sequence. তাই খালি bounded above দেখাতে পারলেই convergence প্রমাণ হয়ে যাবে।

> $\because \forall k \in \mathbb{N} \quad b_k \geq 0$,
> $\therefore \{T_n\}_n$ is increasing.

এবার bounded above দেখাব। তার জন্য $\sum a_n$-এর partial sum-গুলো নিয়ে কাজ করতে হবে।

> Let $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
> $\because \sum a_n < \infty$,
> $\therefore \{S_n\}_n$ is convergent, hence bounded, hence bounded above, by L, say.

এটা বলতে পারলাম কারণ convergent sequence-রা bounded হয়।
এদিকে $b_n \leq a_n$ দেওয়া আছে, তাই $T_n \leq S_n$. ফলে T_n-রা আছে S_n-এর তলায়, আর S_n-গুলো নিজেরাই bounded above. তাই T_n-রাও অবশ্যই bounded above.

> Also, $\because \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq a_n$,
> $\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad T_n \leq S_n < L$.
> Thus $\{T_n\}_n$ is an increasing sequence bounded above, and hence convergent.
> $\therefore \sum b_n < \infty$, as required.

[Q.E.D]

Exercise 10: প্রথম অংশের প্রমাণটা হয়ে গেলে দ্বিতীয় অংশের প্রমাণটা এক লাইনে করা যায়। চেষ্টা করে দ্যাখো! ■

এবার এই comparison test-এর কিছু প্রয়োগ দেখি।

Example 3: Check the convergence of $\sum \frac{3}{n^2+10}$.

SOLUTION: এখানে $\frac{3}{n^2+10} \leq \frac{3}{n^2}$ আর আমরা জানি যে $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$. তাই সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

$$\sum \frac{3}{n^2+10} \leq \sum \frac{3}{n^2} = 3\sum \frac{1}{n^2} < \infty.$$

লক্ষ কর যে convergence-এর প্রশ্নে 3-টার কোনো ভূমিকা নেই, ওটাকে নিশ্চিন্তে $\sum$-এর বাইরে নিয়ে আসা যায়। ■

Example 4: Check the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{3}{2}}$.

SOLUTION: এই series-টার কিন্তু সব term-ই positive নয়। যদি $n = 1$ বা 2 নিই তবে negative আসবে। কিন্তু তাতে অসুবিধা নেই, কারণ তারপর থেকে সব term-ই positive. গোড়ার finitely many term নিয়ে আমরা কখনোই মাথা ঘামাই না। তাই--

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{3}{2}}$ converges iff $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{3}{2}}$ converges.

এই নতুন series-টার সব term-ই positive, তাই comparison test লাগানো যাবে।

Now for $n \geq 3$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{3}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

So, applying comparison test,

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{3}{2}} \geq \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty.$$

Hence the given series diverges.

■

এবার কিছু অন্য স্বাদের অংক।

Exercise 11: If $\sum U_n$ is a convergent series of positive terms, prove that $\sum U_n^2$ is also a convergent series.[2] ■

HINT:
এই ছোট্টো অংকটার কায়দাটা এইরকম-- $\sum U_n < \infty$ বলে $U_n \to 0$ হবে।

$\because \sum U_n$ is convergent,

$\therefore U_n \to 0.$

তার মানে এক সময়ে U_n-গুলো ছোটো হতে হতে 1-এর চেয়ে ছোটো হয়ে যাবে।

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |U_n| < 1.$

যদি 0 থেকে 1-এর মধ্যে কোনো সংখ্যার square নিই, তবে সেই square-টা সংখ্যাটার চেয়ে ছোটো হয়--$0 < x < 1 \implies x^2 < x$. যেমন $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. সুতরাং যেই একবার $0 < U_n < 1$ হবে অমনি $U_n^2 < U_n$ হবে। তখন আমরা comparison test লাগাতে পারব, কারণ $\sum U_n^2$-এর লেজ $\sum U_n$-এর লেজের চেয়ে সরু।

> So $\forall n \geq N$ we have $0 < U_n < 1$, and hence $U_n^2 < U_n$.
> So by comparison test, $\sum U_n^2 < \infty$.

নীচের অংকটা একই রকম।

Exercise 12: If $\sum U_n$ is a convergent series of positive terms, prove that $\sum U_n^3$ is also a convergent series. ■

এরপরের অংকটারও মূল কায়দাটা একই, খালি divergent বলেছে এখানে আর জোর দিয়ে $U_n \to 0$ বলা যাবে না। তাই দুটো কেসে ভেঙে করতে হবে $U_n \to 0$ আর $U_n \not\to 0$.

Exercise 13: If $\sum U_n$ is a divergent series of positive terms, prove that $\sum \sqrt[4]{U_n}$ must be a divergent series. ■

পরের অংকটার বক্তব্য বেশ মজার। আমরা শিখেছি যে $\sum b_n$ যদি converge করে তবে $b_n \to 0$ হয়, কিন্তু উল্টোটা ঠিক নয়--$b_n \to 0$ হলেই যে $\sum b_n$ converge করবে এমন কোনো কথা নেই। নীচের অংকটা বলছে যে, যদি $b_n \to 0$ হয়, তবে এমন একটা subsequence $\{b_{n_k}\}_k$ পাবই যাতে $\sum_k b_{n_k}$-টা converge করে!

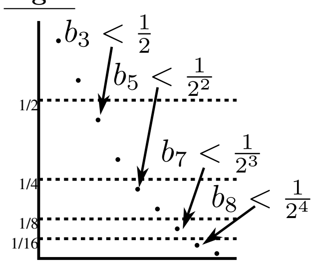
Exercise 14: Prove that a sequence $\{b_n\}_n$ ($b_n > 0$ for all n) converging to zero, has a subsequence $\{b_{n_k}\}_k$ for which $\sum_k b_{n_k}$ is convergent.[2] ■

HINT:
আমরা প্রথমে যে কোনো একটা জানা convergent series নিয়ে শুরু করব, যার প্রতিটা term-ই positive. যেমন এইটা--

> We know that
> $$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \qquad (*)$$
> is a convergent series.

এবার Fig 8 দ্যাখো। যেহেতু $b_n \to 0$ তাই এক সময়ে b_n-গুলো $\frac{1}{2}$-এর নীচের নামবে। তার পর একসময়ে $\frac{1}{2^2}$-এর নীচেও নামবে, $\frac{1}{2^3}$-এর নীচেও নামবে--

Fig 8



Since $b_n \to 0$,

$$\begin{array}{rcl} \exists n_1 \in \mathbb{N} & \text{such that} & b_{n_1} < \frac{1}{2} \\ \exists n_2 > n_1 & \text{such that} & b_{n_2} < \frac{1}{2^2} \\ \exists n_3 > n_2 & \text{such that} & b_{n_3} < \frac{1}{2^3} \\ & \vdots & \\ \exists n_k > n_{k-1} & \text{such that} & b_{n_k} < \frac{1}{2^k}. \end{array}$$

ব্যস্, এই $\sum_k b_{n_k}$-টা converge করতে বাধ্য, কারণ--

Thus $\sum_k b_{n_k}$ is a series with positive terms, and is dominated by the convergent series (*).

Hence $\sum_k b_{n_k}$ converges as required.

Exercise 15: Test convergence of the following series.
(1) $\sum \frac{1}{n^3+5}$ **(2)** $\sum e^{-n^2}$
■

DAY 20
Comparison test (limit form)

এই বার comparison test-এর আরেকটা রূপ শিখব তাকে বলে comparison test-এর limit form. মূল ব্যাপারটা এখানেও একই, তবে প্রয়োগ করার সময়ে অনেক সময়ে এটা একটু বেশী সুবিধাজনক।

Example 5: Show that $\sum \frac{1}{n^2-\frac{1}{2}} < \infty$.

SOLUTION: এখানে আন্দাজ করতে পারছি যে $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$-র সঙ্গে comparison test লাগালে কাজ হবে। কিন্তু তলার ওই $-\frac{1}{2}$-টা এসে মুস্কিল বাঁধিয়েছে। ফলে $\frac{1}{n^2-\frac{1}{2}}$-গুলো $\frac{1}{n^2}$-এর চেয়ে ছোটো না হয়ে বড় হয়ে গেছে। এখানে একটা ছোট্টো কৌশল লাগাব, এটা খুব কাজের জিনিস। প্রথমে কিছু নাম দিয়ে নিই--

Let $a_n = \frac{1}{n^2-\frac{1}{2}}$ and $b_n = \frac{1}{n^2}$.

এখানে a_n হল যেটা দিয়েছে, আর b_n হল যেটার সঙ্গে compare করব। এবার কৌশলটা হল $\frac{a_n}{b_n}$-এর limit নেওয়া। এখানে $\sum a_n$-কে compare করছি $\sum b_n$-এর সঙ্গে, তাই উপরে a_n আর নীচে b_n নিয়েছি।

Then

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2n^2}} \to \frac{1}{1-0} = 1.$$

Limit-টা যে 1 এল সেটা খুব গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়, দরকারী কথাটা হল এই যে limit-টা একটা finite সংখ্যা। এই limit-টাকে কাজে লাগিয়ে আমরা comparison test করব। তার জন্য limit-টার চেয়ে বড় যে কোনো একটা সংখ্যা নাও। যেমন $2 > 1$. যেহেতু $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ তাই এক সময়ে না এক সময়ে $\frac{a_n}{b_n} < 2$ হবেই (কারণ সব সময়েই ≥ 2 হয়ে বসে থাকলে আর 1-এর কাছে যাবে কি করে?) Fig 9 দ্যাখো। তার মানে

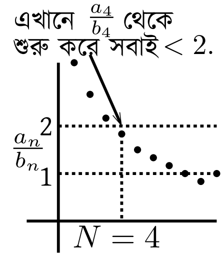


Fig 9

> $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_n}{b_n} < 2,$
> Hence, $\because b_n > 0,$
> $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < 2b_n.$

এবার বুঝতেই পারছ কি করে comparison test লাগাতে হবে। আমরা a_n-কে b_n-এর সঙ্গে compare না করে $2b_n$-এর সঙ্গে করব। তাতে অসুবিধা নেই, কারণ $\sum b_n < \infty$ বলে $\sum 2b_n = 2\sum b_n < \infty$ হবে। তাই comparison test বলছে যে $\sum a_n < \infty$ হবে, ঠিক যেটা দেখাতে বলেছিল। ■

এই অংকটা ভালো করে বুঝে দ্যাখো। বিশেষ করে এই কথাটা যে $\frac{a_n}{b_n}$-র limit-টা যে কোনো finite সংখ্যা হলেই যে একই যুক্তি লাগানো যায়। এই কথাটাই নীচের theorem-এ গুছিয়ে বলা হয়েছে। এই theorem-টাকে বলে একটা limit form of comparison test.
Convergence-এর জন্য যেমন একটা comparison test (limit form) আছে, তেমনি divergence-এ জন্যও একটা আছে। নীচের উদাহরণটা দেখলেই সেটা বুঝবে।

Example 6: Show that $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+2} = \infty$.

SOLUTION: আন্দাজ করতে পারছি যে, comparison test করতে হবে $\frac{1}{\sqrt{n}}$-এর সঙ্গে। আমাদের series-টার general term-এর নাম দিই

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+2},$$

আর যার সঙ্গে তুলনা করব তার নাম দিই

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

সেই limit-এর কৌশলটা খাটাই--

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1+0} = 1 > 0.$$

ঠিক আগের বারের মতই এবারও আমাদের limit-টা কত এল তা নিয়ে চিন্তা নেই, এবার খালি দেখা দরকার Limit-টা > 0 কি না। আমাদের ক্ষেত্রে $1 > 0$. এবার আমরা এই limit-টার চেয়ে ছোটো যে কোনো একটা positive সংখ্যা নেব, ধরো $0 < \frac{1}{2} < 1$.
যেহেতু $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, তাই

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{1}{2},$$

মানে

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \geq \frac{1}{2} b_n.$$

আমরা জানি যে $\sum b_n = \infty$, তাই $\sum \frac{1}{2} b_n = \infty$.
সুতরাং comparison test বলছে যে $\sum a_n = \infty$. ■

এই দুটো উদাহরণের যুক্তিটা বুঝে থাকলে নীচের theorem-টা বুঝতে অসুবিধা হওয়ার কথা নয়।

Comparison test (limit form)

Let $\sum a_n, \sum b_n$ be two series of positive terms, and let $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$, where ℓ is some nonnegative number or ∞. Then

- if $\sum b_n < \infty$ and $\ell \in [0, \infty)$, then $\sum a_n < \infty$,
- if $\sum b_n = \infty$ and $\ell > 0$ or $\ell = \infty$, then $\sum a_n = \infty$.

এইটা ব্যবহার করে কয়েকটা অংক করি।

Example 7: Show that $\sum \frac{3n+2}{n^3+5n+6} < \infty$.

SOLUTION: এরকম অংকে যেটা চট্ করে লক্ষ করার বিষয় সেটা হল উপরতলায় n-এর সর্বোচ্চ power কত আর নীচের তলাতেই বা সর্বোচ্চ power কত। এখানে উপরতলায় n আর নীচের তলায় n^3 আছে। কাটাকাটি করলে নীচের তলায় n^2 থাকবে। তাই $\sum \frac{1}{n^2}$-এর সঙ্গে comparison test করলে কাজ হবে। কেন হবে সেটা নীচের ধাপগুলো দেখলেই বুঝবে।

> Let $a_n = \frac{3n+2}{n^3+5n+6}$ and $b_n = \frac{1}{n^2}$. Then
>
> $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2(3n+2)}{n^3+5n+6} = \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}} \to \frac{3+0}{1+0+0} = 3 < \infty.$$
>
> We know that $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} < \infty$.
> So, by comparison test (limit form), $\sum a_n < \infty$, as required.

■

এবার একটা divergence-এর উদাহরণ--

Example 8: Show that $\sum \frac{n+2}{n^2+15n+9} = \infty$.

SOLUTION:

> Let $a_n = \frac{n+2}{n^2+15n+9}$, and $b_n = \sum \frac{1}{n}$.
> Then
>
> $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n(n+2)}{n^2+15n+9} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{15}{n}+\frac{9}{n^2}} \to \frac{1+0}{1+0+0} = 1 > 0.$$

$\because \sum b_n = \sum \frac{1}{n} = \infty$,
$\therefore$ By comparison test, $\sum a_n = \infty$, as required.

■

Exercise 16: Test convergence/divergence of the following series.
(1) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+5n-1}$ **(2)** $\sum \frac{n^2}{10n^2+n-13}$ **(3)** $\sum \frac{n^3-4n^2+56}{n^5+5n-10}$ **(4)** $\sum \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}{3n+n^2+\sqrt{n}}$
■

লক্ষ কর যে convergence-এর জন্য দরকার ছিল $\lim \frac{a_n}{b_n}$-টা যেন $< \infty$ হয় (0 হলেও আপত্তি নেই)। আবার divergence-এর জন্য দরকার হল এই limit-টা যেন > 0 হয় (∞ হলেও আপত্তি নেই)। দুটোই যদি এক সঙ্গে হয় (মানে limit-টা $(0, \infty)$-তে থাকে) তবে তো সোনায় সোহাগা--এক ঢিলে convergence আর divergence দুটোই পেয়ে যাচ্ছি, মানে $\sum a_n$ আর $\sum b_n$-এর আচরণ একই হবে।
এইখানে আরেকবার সাবধান করে দিই--comparison test কিন্তু খালি positive term-ওয়ালা series-দের জন্যই খাটে। তাই a_n এবং b_n দুজনেরই positive হওয়া দরকার।

Exercise 17: If $a_n > 0$ and if $\lim n^2 a_n$ exists then show that $\sum a_n$ is convergent.[2] ■

HINT:

We know that if $b_n = \frac{1}{n^2}$, then $\sum b_n < \infty$.
Now it is given that

$$\frac{a_n}{b_n} = n^2 a_n \to \ell,$$

for some $\ell \in \mathbb{R}$.
So by comparison test, $\sum a_n$ converges.

Exercise 18: Check convergence of:
(1) $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$ **(2)** $\sum \frac{3^n+1}{7^n+4}$ **(3)** $\sum \frac{3^n+1}{2^n+400}$ **(4)** $\sum \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$
■

Exercise 19: Let $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ be all the positive integers with 1 in the units place of their decimal representations. Test the convergence of

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} \text{ and } \frac{1}{(a_n)^2}.$$

■

নীচের কয়েকটা অংকের জন্য একটু trigonometry লাগবে। মনে আছে নিশ্চয়ই যে $x \to 0$ হলে

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{আর} \quad \cos x \to 1.$$

তার মানে x যখন 0-র খুব কাছে, তখন $\sin x \approx x$ আর $\cos x \approx 1$. সুতরাং $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{x}{1} = x$.

Exercise 20: Test the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tan \frac{1}{n}.$$

[3] ■

HINT:

> The given series is $\sum_n a_n$, where
>
> $$a_n = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \tan \tfrac{1}{n}.$$

যখন $n \to \infty$ নেব তখন $\frac{1}{n} \to 0$ হবে। সুতরাং $\tan \frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$ হবে। তার মানে $a_n \approx \frac{1}{n\sqrt{n}}$. এ থেকেই বুঝতে পারছি যে কার সাথে compare করতে হবে--

> Let
>
> $$b_n = \frac{1}{n^{3/2}}.$$
>
> Then
>
> $$\frac{a_n}{b_n} = n \tan \tfrac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} \to 1.$$
>
> So $\sum a_n$ behaves like $\sum b_n$. Now we know that $\sum \frac{1}{n^p} < \infty$ if $p > 1$.
> $\because \frac{3}{2} > 1, \therefore \sum b_n < \infty$.
> $\therefore \sum a_n < \infty$.

Exercise 21: Test convergence/divergence of the following.
(1) $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ **(2)** $\sum n \tan \frac{1}{n^2}$ **(3)** $\sum \sin^2 \frac{1}{n}$ **(4)** $\sum \cos \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n^3}$ **(5)** $\sum (e^{1/n^2} - 1)$
■

DAY 21
Comparison with geometric series

আমরা দুই ধরণের standard series শিখেছিলাম--geometric series আর $\sum \frac{1}{n^p}$. আমরা এতক্ষণ যতগুলো comparison test করেছি সবই করেছি $\sum \frac{1}{n^p}$-জাতীয় series-এর সঙ্গে। এবার আমরা geometric series-এর সঙ্গে compare করা শিখব। এই কাজটা করার প্রধান দুটো কায়দা আছে--root test আর ratio test. এদের মধ্যে root test-টা বুঝতে বেশী সহজ, আর ratio test-টা করতে বেশী সহজ। যেহেতু comparison test থেকে এদের জন্ম তাই এই দুটো test-ও খালি positive term-ওয়ালা series-এর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

21.1 Root test

একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 9: Let $a_n > 0$. If

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{a_n} < \tfrac{1}{2},$$

then show that $\sum a_n < \infty$.

SOLUTION: তার মানে এখানে একটা series দিয়েছে $\sum a_n$ যার সবগুলো term-ই positive, আর প্রথম কয়েকটা term বাদ দিলে $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2}$. দেখাতে হবে $\sum a_n < \infty$.

এখানে আসলে একটা geometric series লুকিয়ে আছে। ওই যে $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2}$ বলেছে সেটাকে লেখা যায় $a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, তাই $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ এই convergent geometric series-টার সাথে comparison test লাগানো যাবে।

> By the given condition
>
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$
>
> $\because \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$,
>
> $\therefore \sum a_n < \infty$ by comparison test.

লক্ষ কর যে এখানে $\frac{1}{2}$-এর কোনো আলাদা গুরুত্ব নেই, ওর জায়গায় 0 থেকে 1-এর মধ্যে যে কোনো সংখ্যা থাকলেই চলত।

■

এবার অংকটাকে আরেকটু জটিল করি।

Example 10: Let $a_n > 0$. If

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \tfrac{1}{2},$$

then show that $\sum a_n < \infty$.

SOLUTION: এখানে $\frac{1}{2} < 1$, তাই আমরা এমন কোনো একটা সংখ্যা নিই যেটা $\frac{1}{2}$ আর 1 মধ্যে কোথাও আছে, যেমন ধরো $\frac{2}{3}$. যেহেতু $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$, তাই--

> $\because \sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$,
>
> $\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{a_n} < \frac{2}{3}$.

এই কথাটা বুঝতে অসুবিধা হলে Fig 10 দ্যাখো। ব্যস্ এবার আগের অংকের মতই--

> $\therefore \forall n \geq N \quad a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
>
> We know that $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty$, since $0 < \frac{2}{3} < 1$.
>
> $\therefore \sum a_n < \infty$ by comparison test.

■

বুঝতেই পারছ যে এখানেও $\frac{1}{2}$-এর কোনো আলাদা গুরুত্ব নেই। ওর জায়গায় যেকোনো $0 < \ell < 1$ থাকলেই চলত। যদি limit-টা > 1 হত তাহলে কিন্তু $\sum a_n = \infty$ হত, যেমন নীচের উদাহরণে।

Example 11: Let $a_n > 0$. If

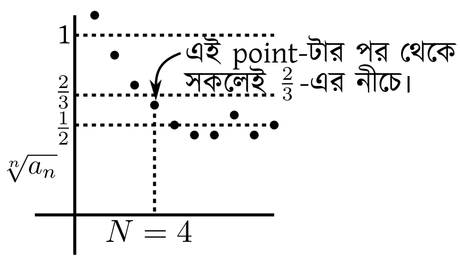


Fig 10

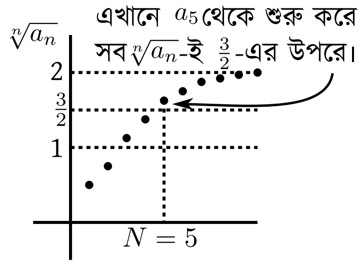


Fig 11

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2,$$

then show that $\sum a_n = \infty$.

SOLUTION: এখানে $2 > 1$, আমরা প্রথমে এমন কোনো একটা সংখ্যা নিই যেটা 1 আর 2 মধ্যে কোথাও আছে, যেমন ধরো $1 < \frac{3}{2} < 2$. যেহেতু $\sqrt[n]{a_n} \to 2$, তাই--

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{a_n} > \tfrac{3}{2}.$$

Fig 11 দ্যাখো।

$\therefore \forall n \geq N \quad a_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
We know that $\sum \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$,
$\therefore \sum a_n = \infty$ by comparison test.

■

এই ব্যাপারটা যদি বুঝে থাকো তবে নীচের theorem-টা বুঝতে কোনো অসুবিধা নয়। এটা হল root test-এর একটা রূপ।

Root test (simple form)

Let $\{a_n\}_n$ be a sequence of positive numbers. Then

$$\lim_n (a_n)^{1/n} < 1 \implies \sum a_n < \infty,$$

and

$$\lim_n (a_n)^{1/n} > 1 \implies \sum a_n = \infty.$$

If $\lim_n (a_n)^{1/n} = 1$, then $\sum a_n$ may converge or diverge.

শেষের লাইনটা লক্ষ করেছ? যদি $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1$ হয় তবে $\sum a_n < \infty$ হবে, আর $\lim_n \sqrt[n]{a_n} > 1$ হলে $\sum a_n = \infty$ হবে। কিন্তু যদি $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$-টা ঠিক 1-এর সমান হয়ে যায়? তবে কিছুই বলা যায় না। নীচের অংকটায় এরকম দুটো উদাহরণ রয়েছে।

Example 12: আমরা আগেই বলেছি যে $\sum \frac{1}{n} = \infty$ আর $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$. এদের উপর root test লাগালে কি হয়

দ্যাখো।

SOLUTION: এখানে আমরা একটা তথ্য ব্যবহার করব--$\lim_{x\to 0+} x^x = 1$. এটা L'Hôpital দিয়ে প্রমাণ করা যায় (করে দ্যাখো!)।

প্রথম series-টার বেলায় $a_n = \frac{1}{n}$. তাই $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = x^x$, যেখানে $x = \frac{1}{n}$. লক্ষ কর যে $n \to \infty$ হলে $x \to 0+$ হয়। তাই

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} x^x = 1.$$

দ্বিতীয় series-টার ক্ষেত্রে $a_n = \frac{1}{n^2}$. তাই এখানে $x = \frac{1}{n}$ নিলে

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} (x^x)^2 = \left(\lim_{x\to 0+} x^x\right)^2 = 1^2 = 1.$$

তার মানে দুই ক্ষেত্রেই $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$ হচ্ছে, অথচ $\sum a_n$ একবার converge করছে, একবার diverge করছে। ■

এবার root test-এর একটা প্রয়োগ দেখি।

Exercise 22: For arbitrary positive number α, test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ where

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-n^{\alpha+1}}.$$

[5] ■

HINT:

ওই যে a_n-এর মধ্যে একটা মস্ত power-এর উপরতলায় n আছে, সেটা থেকেই অনুমান করছি যে এখানে root test কাজে দেবে।

$$(a_n)^{1/n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-n^{\alpha+1}}\right]^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-n^\alpha}.$$

$\because \alpha > 0 \therefore n^\alpha \to \infty$ as $n \to \infty$.

Let $m = n^\alpha$.

Then

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-m} = e^{-1} < 1.$$

এখানে আমরা এই কথাটা ব্যবহার করলাম যে $\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$ হয়। এটা হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে শিখেছিলে।

So, by the root test, the given series converges.

Exercise 23: Check convergence of

$$\sum \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^{-n}.$$

■

21.2 Ratio test

Root test জিনিসটা বুঝতে খুব কঠিন নয়, কিন্তু অংক কষার সময়ে ওই n-th root বার করাটা সব সময়ে সহজ হয় না। এবার আমরা অন্য একটা কায়দা শিখব যেখানে এই সমস্যাটা নেই। এটাও ভিতরে ভিতরে geometric series-এর সঙ্গে comparison ছাড়া আর কিছুই নয়, কিন্তু এখানে কোনো n-th root-এর ঝামেলা নেই। কয়েকটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 13: Let $a_n > 0$. If

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2},$$

then show that $\sum a_n < \infty$.
SOLUTION: প্রথমে বুঝে দেখি এই শর্তটার মানে কি। এর মানে হল একটা N-এর পর থেকে প্রত্যেকটা a_{n+1} তার আগের a_n-এর অর্ধেকেরও ছোটো। যেমন $a_9 = 2$ হলে $a_{10} < 1$ হবে, আর $a_{11} < \frac{1}{2}$ হবে, এই রকম।

> Here
>
> $$\begin{aligned} a_{N+1} &< \tfrac{1}{2} a_N \\ a_{N+2} &< \tfrac{1}{2} a_{N+1} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 a_N \\ &\vdots \\ a_n &< \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-N} a_N \text{ for } n \geq N. \end{aligned}$$
>
> We know that $\sum a_N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = a_N \left(\frac{1}{2}\right)^{-N} \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$.
> So, by comparison test, $\sum a_n < \infty$, as required.

■

এবার একই জিনিসের limit-সংস্করণ দেখা যাক।

Example 14: Let $a_n > 0$. If

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2},$$

then show that $\sum a_n < \infty$.
SOLUTION: লক্ষ কর যে এখানে $\frac{1}{2} < 1$. আমাদের প্রথম কাজ হবে $\frac{1}{2}$ আর 1-এর মধ্যে কোনো সংখ্যা নেওয়া যেমন $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$. যেহেতু $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \frac{1}{2}$, তাই--

> $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2}{3}$.

ঠিক একই যুক্তি আমরা root test শেখার সময়েও ব্যবহার করেছিলাম। তাই Fig 12 আমাদের অপরিচিত নয়, খালি এবার y-axis-এ $\sqrt[n]{a_n}$-এর বদলে $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ দেখানো হয়েছে।
ব্যস্ এবার আবার আগের অংকটার মত এগোলেই হবে।

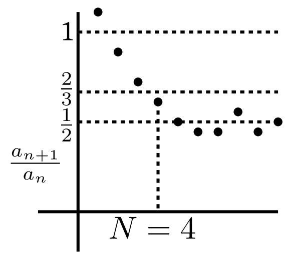


Fig 12

> Here
>
> $$\begin{aligned} a_{N+1} &< \tfrac{2}{3}a_N \\ a_{N+2} &< \tfrac{2}{3}a_{N+1} < \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 a_N \\ &\vdots \\ a_n &< \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-N} a_N \text{ for } n \geq N. \end{aligned}$$
>
> We know that $\sum a_N \left(\frac{2}{3}\right)^{n-N} = a_N \left(\frac{2}{3}\right)^{-N} \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty$.
> So, by comparison test, $\sum a_n < \infty$, as required.

■

এই একই কায়দা divergence প্রমাণ করার কাজেও ব্যবহার করা যায়। তার একটা উদাহরণ দেখি।

Example 15: Let $a_n > 0$. If

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3,$$

then show that $\sum a_n = \infty$.
SOLUTION: এখানে limit-টা হল $3 > 1$. প্রথম কাজ হল 1 আর 3-এর মধ্যে যে কোনো একটা সংখ্যা নেওয়া, ধরো $1 < 2 < 3$. তাহলে--

> $\because \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3,$
>
> $$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 2.$$

Fig 13

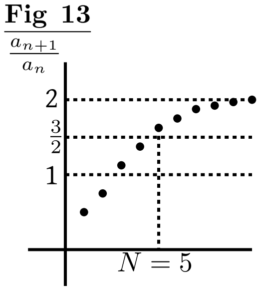


Fig 13 দ্যাখো।

$$\begin{aligned} \therefore a_{N+1} &> 2a_N \\ a_{N+2} &= 2a_{N+1} = 2^2 a_N \\ &\vdots \\ a_n &> 2^{N-n} a_N \text{ for } n \geq N. \end{aligned}$$

এবার $\sum a_n$-কে compare করব $\sum a_N 2^{n-N} = a_N 2^{-N} \sum 2^n$,-এর সাথে, যেটা অবশ্যই diverge করে (কারণ এটা একটা geometric series যার common ratio হল $2 > 1$).

> We know that $\sum a_N 2^{n-N} = \infty$. So, by comparison test, $\sum a_n = \infty$, as required.

■

এই দুটো উদাহরণ থেকে যা শিখলাম সেটাই গুছিয়ে লিখলে পাওয়া যায় ratio test–

Ratio test (simple form)

Let $\sum a_n$ be an infinite series of positive terms. Then

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum a_n < \infty,$$

and

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum a_n = \infty.$$

If $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, then $\sum a_n$ may converge or diverge.

Root test-এর মত ratio test-এও limit-টা 1 হয়ে গেলে মুস্কিল হয়, তখন আরও পরীক্ষা না করে জোর দিয়ে বলা যায় না $\sum a_n = \infty$ হবে নাকি $\sum a_n < \infty$ হবে! নীচের উদাহরণটা দেখলে ব্যাপারটা স্পষ্ট হবে।

Example 16: যদি $a_n \equiv 1$ নিই তবে $\sum a_n$ কি করবে-- converge না diverge?

Ratio test লাগালে কি পাওয়া যায়? যদি $b_n = \frac{1}{n^2}$ নিই তবে আমরা জানি যে $\sum b_n < \infty$. এক্ষেত্রেই বা ratio test কি বলে?

SOLUTION: এখানে

$$\sum a_n = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots .$$

দেখাই যাচ্ছে যে n-th partial sum হল $S_n = n \to \infty$. সুতরাং $\sum a_n = \infty$.
যদি ratio test লাগাই--

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{1} = 1.$$

আবার $\sum b_n$-এর উপরে ratio test লাগালে পাই--

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2}{n^2+2n+1}$$
$$= \lim \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+0+0} = 1.$$

এ থেকে এই জ্ঞান লাভ করা গেল যে, ratio test-এর limit-টা যদি 1 হয়ে যায়, তবে জোর দিয়ে কিছুই বলা যায় না, series-টা converge-ও করতে পারে, diverge-ও করতে পারে। এক্ষেত্রে আরও শক্তিশালী কোনো test-এর দরকার। এরকম শক্তিশালী কিছু test আমরা শিখব ষষ্ঠ অধ্যায়ে গিয়ে। ■

Exercise 24: Check convergence of:
(1) $\sum \frac{5^n}{n!}$ **(2)** $\sum \frac{5^{n+1}7^{n-1}}{n!}$ **(3)** $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **(4)** $\sum \frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$ **(5)** $\sum \frac{n!}{2^{2n}}$ **(6)** $\sum \frac{(10+(-1)^n)^n}{n!}$
■

DAY 22
Proofs and generalisations

আমরা আগেই বলেছি যে $\sum \frac{1}{n^p}$ series-টা converge-ও করতে পারে, diverge-ও করতে পারে, কোনটা করবে সেটা নির্ভর করে p-এর উপরে। যদি $p>1$ হয় তবে converge করবে, আর $p \leq 1$ হলে diverge করবে। এই কথাটা আমরা বলেছি কিন্তু প্রমাণ করি নি। আজকে প্রমাণটা করব।

22.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

প্রথমে প্রমাণ করব যে $\sum \frac{1}{n} = \infty$. তাহলেই এটাও প্রমাণ হয়ে যাবে যে $p \leq 1$ হলে $\sum \frac{1}{n^p} = \infty$ হবে। (কেন বল তো!)

Example 17: Show that $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

SOLUTION: আমরা এখানে comparison test লাগাব। তুলনাটা করব এই series-টার সাথে--

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,$$

যেটা অবশ্যই divergent. কিন্তু এখানে একটু প্যাঁচ আছে। সেটা বলি।

> Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
> To show $S_n \to \infty$.

এবার লক্ষ কর যে $\{S_n\}_n$ হল একটা increasing sequence.

> $\because$ All terms are positive,
> $\therefore \{S_n\}_n$ is an increasing sequence.

এইবার আসল প্যাঁচটা--যেহেতু $\{S_n\}_n$ একটা monotone sequence, তাই খালি একটা subsequence-কে divergent দেখাতে পারাই যথেষ্ট। কেন যথেষ্ট সেটা ভালো করে বুঝে নাও--monotone sequence-রা হয় converge করে, নয় তো diverge করে (oscillate করতে পারে না)। আমরা জানি যে convergent sequence-এর subsequence-রা সব সময়ে convergent-ই হয়, আর divergent sequence-এর subsequence-রা divergent-ই হয়। সেই কারণে monotone sequence-দের বেলায় একটা subsequence-এর আচরণ দেখেই পুরো sequence-টার আচরণ বলে দেওয়া যায়।

> So enough to show some subsequence $\{S_{n_k}\}_k$ such that $S_{n_k} \to \infty$.

একটা বিশেষ subsequence নিয়ে কাজ করলে আমাদের সুবিধা হবে। সেটা হল

$$S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \ldots$$

প্যাটার্ণটা ধরতে পারলে? $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ এরা সবাই হল 2-এর বিভিন্ন power–

$$2 = 2^1, \quad 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3, \ldots$$

তার মানে আমরা আমাদের subsequence-টাকে লিখতে পারি $\{S_{n_k}\}_k$, যেখানে $n_k = 2^k$.

> Choose $n_k = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$.
> Shall show $S_{n_k} > \frac{k}{2}$.

তাহলেই যে অংকটা হয়ে যাবে সেটা আশা করি বুঝতে পারছ, কারণ $k \to \infty$ হলে $\frac{k}{2} \to \infty$ হবে, আর তাই $S_{n_k} > \frac{k}{2} \to \infty$ হবে, ঠিক যেমনটা আমরা চাই।
ঠিক কেন এই বিশেষ subsequence-টা নিলাম, সেটা আগেভাগে বোঝার কোনো সহজ পথ আছে বলে জানি না। আপাততঃ এটাকে একটা অদ্ভুত কৌশল হিসেবে ধরে নাও। পরে দেখবে যে এই কৌশলটা অন্যত্রও কাজে লাগে।
একবার কৌশলটা মেনে নিলে বাকী কাজ খুব কঠিন কিছু নয়। আমরা S_{n_k}-এর term-গুলোকে গ্রুপে গ্রুপে ভাগ করব। যেমন ধরো S_8-এর বেলায়

$$S_8 = \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right).$$

প্রথম গ্রুপে আছে $2^1 = 2$-খানা term, দ্বিতীয় গ্রুপে আছে $2^2 - 2^1 = 2$-খানা term, তৃতীয় গ্রুপে আছে $2^3 - 2^2 = 4$-খানা term, এইরকম। যেমন S_{16}-এর বেলায় গ্রুপে ভাঙতাম এইভাবে--

$$16 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{2+2}_{4}+4}_{8}+8}_{16}.$$

> We have
>
> $$S_{n_k} \quad = \quad \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}\right).$$

এবার লক্ষ কর যে প্রতিটা গ্রুপের যোগফলই $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে বড়।

> Now
>
> $$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2} &> \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} &> \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8} &> \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} \\ &\vdots \\ \tfrac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^k} &> \tfrac{1}{2^k} + \cdots + \tfrac{1}{2^k} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\therefore S_{n_k} > \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2}}_{k \text{ times}} = \frac{k}{2}$.

ব্যস্, প্রমাণ প্রায় শেষ। এবার খালি ছোটো করে উপসংহার টানার পালা--

$\because \frac{k}{2} \to \infty$ as $k \to \infty$,
$\therefore S_{n_k} \to \infty$ as $k \to \infty$.
$\because \{S_n\}_n$ is a monotone sequence,
$\therefore S_n \to \infty$.

■

প্রমাণটা ভালো করে খুঁটিয়ে পড়। এর মধ্যে তিনটে প্যাঁচ আছে। এক, একটা বিশেষ subsequence নিয়ে কাজ করা। দুই, term-গুলোকে গ্রুপে গ্রুপে ভাগ করা। আর তিন, প্রতিটা গ্রুপকে $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে বড় দেখানো।
এবার দেখাব যে $p > 1$ হলে $\sum \frac{1}{n^p} < \infty$ হয়। বোঝানোর সুবিধার জন্য আমরা নীচের উদাহরণে $p = 2$ নিয়েছি। অন্য যে কোনো $p > 1$-এর জন্য প্রমাণটা একই রকম।

Example 18: Show that $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

SOLUTION: এখানেও আমরা ঠিক আগের অংকের কৌশলটাই করব। প্রথম দুটো প্যাঁচ ঠিক আগেরই মত, subsequence নেওয়া আর গ্রুপ করা--

Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
To show $\{S_n\}_n$ converges.
$\because$ All terms are positive,
$\therefore \{S_n\}_n$ is an increasing sequence.
So enough to show that some subsequence $\{S_{n_k}\}_k$ converges.
Choose $n_k = 2^k$ for $k \in \mathbb{N}$.
$\because$ Increasing sequences bounded from above converges, so enough to show $\{S_{n_k}\}_k$ is bounded above.
We have

$$S_{n_k} = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^2}\right).$$

তৃতীয় প্যাঁচটা সামান্য অন্যরকম। আমরা প্রথম গ্রুপটাকে আপাততঃ হিসেবের বাইরে রাখব। আর দেখাব যে k-th গ্রুপের যোগফল হবে $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$-র চেয়ে ছোটো, যেখানে $k \geq 2$. মানে দ্বিতীয় গ্রুপটা $\leq \frac{1}{2}$, তৃতীয়টা $\leq \frac{1}{4}$, চতুর্থটা $\leq \frac{1}{8}$, এইরকম। এটা কি করে দেখাব সেটা বোঝার জন্য একটা উদাহরণ নিই, ধরো তিন নম্বর গ্রুপটা--

$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}.$$

এতে ঠিক $2^3 - 2^2 = 4$-টা term আছে। এরা সবাই আগের গ্রুপের শেষ term-টার (মানে $\frac{1}{4^2}$-এর) চেয়ে ছোটো। তাই

$$\tfrac{1}{5^2} + \cdots + \tfrac{1}{8^2} \leq \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}.$$

এই কাজটা করলাম $k = 3$ নম্বর গ্রুপের জন্য। এইবার একই জিনিস গুছিয়ে লিখব যে কোনো k-এর জন্য--

Now

$$\tfrac{1}{(2^{k-1}+1)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(2^k)^2} \leq \underbrace{\tfrac{1}{(2^{k-1})^2} + \cdots + \tfrac{1}{(2^{k-1})^2}}_{2^k \text{ times}} = \tfrac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^2} = \tfrac{1}{2^{k-1}}.$$

তার মানে

$$\begin{aligned} S_{n_2} &\leq \left(1 + \tfrac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2} \\ S_{n_3} &\leq \left(1 + \tfrac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \\ &\vdots \\ S_{n_k} &\leq \left(1 + \tfrac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

লক্ষ কর প্রথম গ্রুপটা $(1 + \frac{1}{2^2})$ কি রকম অপরিবর্তিত রেখে দিয়েছি।

So

$$\begin{aligned} S_{n_k} &\leq \left(1 + \tfrac{1}{2^2}\right) + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{k-1}} \\ &\leq \left(1 + \tfrac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots\right) \\ &\leq \left(1 + \tfrac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

$\therefore \{S_{n_k}\}_k$ is bounded above,

$\therefore \{S_{n_k}\}_k$ converges, since it is bounded.

$\because \{S_n\}_n$ is a monotone sequence,

$\therefore \{S_n\}_n$ converges, as required.

■

22.2 Comparison with geometric series

আমরা আগেই বলেছি যে geometric series-এর সঙ্গে comparison test লাগিয়ে দুরকম test তৈরী হয়--এক, ratio test আর দুই, root test. আমরা এই দুটো test-এরই দুটো সহজ (এবং সবচেয়ে প্রয়োজনীয়) সংস্করণ দিয়েছি। সংক্ষেপে এও আলোচনা করেছি কেন এই test-গুলো কাজ করে। এই দুটো test-এরই কিছু generalisation আছে, যেখানে limit ব্যবহার না করে $\liminf$ আর $\limsup$ ব্যবহার করা হয়। যেমন ratio test-এ আমরা দেখি $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$-টা 1-এর চেয়ে ছোটো না বড়। Generalised সংস্করণে আমরা $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$-এর বদলে $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ আর $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ নিয়ে কাজ করব।

এতে সুবিধা একটাই। সবসময়ে যদি $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ নাও থাকে তাও ratio test লাগানো যেতে পারে, কারণ $\limsup$ আর $\liminf$ যেকোনো sequence-এরই থাকে (∞ বা $-\infty$ হতে পারে, কিন্তু exist করবেই)।
আমরা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে $\liminf$ আর $\limsup$ নিয়ে আলোচনা করেছিলাম। অধিকাংশ ছাত্রের কাছেই এই দুটো ধারণা স্পষ্ট থাকে না। তাই প্রথমে স্মৃতিটা একটু ঝালিয়ে নেওয়া যাক।

22.2.1 Limsup/liminf দিয়ে লেখা

Sequence-রা চার রকমের হয়--convergent, divergent to ∞, divergent to $-\infty$, আর oscillating. এদের মধ্যে প্রথম তিন ধরণের sequence নিয়ে কাজ করা সহজ, কিন্তু oscillating-দের নিয়ে কাজ করা কঠিন। তাই আমরা এখানে প্রথম তিন ধরণের sequence-দের বলব "ভালো" আর oscillating-দের বলব "বাজে"। Monotone sequence-রা কখনো oscillate করতে পারে না, তাই ওরা সব সময়েই "ভালো"। প্রথম খণ্ডে একটা theorem ছিল এই যে যে কোনো sequence-এর মধ্যে অন্ততঃ একটা monotone subsequence থাকে (কেউই পুরো খারাপ হয় না, খুঁজলে কিছু না কিছু ভালো পাওয়া যায়ই!)। একটা sequence-এর মধ্যে যত "ভালো" subsequence আছে, তাদের যদি সবার limit নিই, তবে সবচেয়ে বড় subsequential limit-টাকে বলি $\limsup$, আর সবচেয়ে ছোটোটাকে বলি $\liminf$. মনে রেখো এই বর্ণনা অনুযায়ী যে কোনো sequence-এরই $\limsup$ আর $\liminf$ থাকে, যদিও তারা কোনো real number না হয়ে ∞ বা $-\infty$ হতে পারে।
প্রথম খণ্ডে আমরা যে $\limsup, \liminf$ শিখেছিলাম, সেটা কেবলমাত্র bounded sequence-এর জন্য। এখানে সেটাকেই সামান্য generalise করলাম।
আমরা এখানে $\limsup, \liminf$ নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি কেন? কারণ--

> ধরো $\{a_n\}_n$ যে কোনো একটা sequence হয়, আর $\ell = \limsup a_n$. এবার যদি কোনো সংখ্যা $c > \ell$ নিই, তবে
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < c.$$

অর্থাৎ, গোড়ার কয়েকটা finite-সংখ্যক a_n বাদে বাকি সবাই c-এর থেকে ছোটো হতে বাধ্য। এইটা ঠাণ্ডা মাথায় ভালো করে বুঝে নাও। যদি তা না হত, মানে যদি infinitely many $a_n \geq c$ হত, তবে এদের ভিতর থেকে আবার একটা monotone subsequence পেতাম। সেটার limit-ও $\geq c$ হত, কিন্তু সেটা তো হতে পারে না, কারণ $\limsup a_n = \ell < c$, মানে সবচেয়ে বড় subsequential limit-টাই c-র থেকে ছোটো!
বুঝতেই পারছ যে $\liminf$-এর বেলাতেও একই রকম একটা কথা খাটে--

> যদি $\ell = \liminf a_n$ হয় আর $c < \ell$ হয়, তবে
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > c.$$

22.2.2 Ratio test

এবার আমরা ratio test-কে $\limsup$ আর $\liminf$ দিয়ে লিখব। মনে আছে নিশ্চয়ই যে $\limsup, \liminf$-কে $\overline{\lim}, \underline{\lim}$-ও লেখা হয়।

Ratio test (for convergence)

Let $\sum a_n$ be an infinite series of positive terms. Then

$$\overline{\lim}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum a_n < \infty.$$

Proof: মনে রেখো যে এখানে $\overline{\lim}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ মানে $\limsup$-টা 1-এর ছোটো কোনো সংখ্যা <u>বা $-\infty$.</u>

> Let $\ell = \overline{\lim}_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
> Let r be any number such that $\ell < r < 1$.

এইবার আমরা $\limsup$-এর কায়দাটা লাগাব।

> $$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$
> ie,
> $$\forall n \geq N \quad a_{n+1} < r a_n.$$

তার মানে

$$\begin{array}{rcl} a_{N+1} & < & r a_N \\ a_{N+2} & < & r a_{N+1} < r^2 a_N \\ a_{N+3} & < & r a_{N+2} < r^3 a_N, \ldots \end{array}$$

সুতরাং আমরা এক কথায় লিখতে পারি--

> Using this repeatedly,
> $$\forall n \geq N \quad a_n < a_N r^{n-N}.$$

এবার আমরা comparison test লাগাব। Compare করব এর সাথে-- $\sum a_N r^{n-N} = a_N r^{-N} \sum r^n$, যেটা একটা geometric series. এর common ratio হল $0 < r < 1$, তাই convergent.

> $\because 0 < r < 1$,
> $\therefore \sum a_N r^{n-N} = a_N r^{-N} \sum r^n < \infty$
> $\therefore$ By comparison test $\sum a_n < \infty$, as required.

[Q.E.D]

ঠিক একইরকম যুক্তি খাটবে divergence-এর বেলাতেও, খালি এবার আমরা $\liminf$ ব্যবহার করব।

Ratio test (for divergence)

Let $\sum a_n$ be an infinite series of positive terms. Then

$$\underline{\lim}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum a_n = \infty.$$

Proof:

> Let $\ell = \underline{\lim}_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
> Let r be any number such that $1 < r < \ell$.

এইবার আমরা $\liminf$-এর কায়দাটা লাগাব।

> Here
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > r,$$
> ie,
> $$\forall n \geq N \quad a_{n+1} > r a_n.$$
> Using this repeatedly,
> $$\forall n \geq N \quad a_n > a_N r^{n-N}.$$

এবার comparison test.

> $\because r > 1$,
> $\therefore \sum a_N r^{n-N} = a_N r^{-N} \sum r^n = \infty$.
> $\therefore$ By comparison test $\sum a_n = \infty$, as required.

[Q.E.D]

22.2.3 Root test

ঠিক যেমন ratio test-কে $\liminf$ আর $\limsup$ দিয়ে লেখা যায়, তেমনি root test-কেও লেখা যায়। তবে root test-এর বেলায় একটা ছোট্টো বাড়তি সুবিধা পাওয়া যায়। সেটা এই যে convergence আর divergence দুই ক্ষেত্রেই খালি $\limsup$ দিয়েই কাজ চলে যায়, $\liminf$ লাগে না।

Root test

Let $\{a_n\}_n$ be a sequence of positive numbers. Let $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \ell$, where ℓ is a nonnegative number or ∞. Then

- $\ell < 1 \implies \sum a_n < \infty$, $\ell > 1 \implies \sum a_n = \infty$.

এর প্রমাণ চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 25: Let $\{a_n\}_n$ be a sequence of positive numbers with

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \ell.$$

Prove that the series converges if $\ell < 1$ and diverges if $\ell > 1$.[3] ■

HINT:

Convergence অংশটার প্রমাণ একেবারেই ratio test-এর convergence-এর প্রমাণের মত, বরং তার চেয়েও সহজ--

> Given: $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \ell$.
> Case 1: $\ell < 1$:
> Let $r = \frac{1}{2}(\ell+1) < 1$.
> Then
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad (a_n)^{1/n} < r,$$
> ie, $0 \leq a_n < r^n$.
> $\because 0 < r < 1$, $\therefore \sum r^n < \infty$.
> $\therefore$ By comparison test, $\sum a_n < \infty$, as required.

Divergence অংশের প্রমাণটা আরও সহজ, কিন্তু এখানে যুক্তিটা অন্যরকম।

> Case 2: $\ell > 1$:
> Let $u_n = (a_n)^{1/n}$.
> Then there is a subsequence $\{u_{n_k}\}_k$ converging to ℓ.

কেন? কারণ ℓ হল $\limsup u_n$ আর $\limsup$ হল সবচেয়ে বড় subsequential limit. তাই কোনো না কোনো subsequence গিয়ে ℓ-এ converge করতে বাধ্য।

> $\therefore \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad u_{n_k} > 1$.
> So $a_{n_k} > 1$. So $a_{n_k} \not\to 0$.
> So $a_n \not\to 0$.
> $\therefore \sum a_n = \infty$, as required.

Exercise 26: Check convergence of:

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$
2. $\sum \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$.

■

Answers

2. Yes. **3.** খালি দ্বিতীয়টা ঠিক। **4.** Necessary. **8.** **(1)** divergent. **(2)** 1. **(3)** $\frac{\pi}{\pi-1}$. **(4)** divergent. **(5)** $\frac{100}{99}$. **(6)** $\frac{9}{2}$. **9.** **(1)** convergent. **(2)** convergent. **(3)** divergent. **(4)** divergent. **(5)** divergent. **(6)** convergent. **15.** **(1)** convergent. **(2)** convergent. **16.** **(1)** convergent. **(2)** divergent. **(3)** convergent. **(4)** convergent. **18.** **(1)** convergent. **(2)** convergent. **(3)** divergent. **(4)** divergent. **19.** এখানে $a_1 = 1, \quad a_2 = 11, \quad a_3 = 21, ...,$ মানে $a_n = 10(n-1)+1$. তাই $\frac{1}{\sqrt{a_n}} = \infty$ আর $\frac{1}{(a_n)^2} < \infty$. **21.** **(1)** convergent. **(2)** divergent. **(3)** convergent. **(4)** convergent. **(5)** convergent. **23.** Convergent. **24.** **(1)** convergent. **(2)** convergent. **(3)** convergent. **(4)** $a < e \implies$ convergent, else divergent. **(5)** divergent. **(6)** convergent. **26.** **(1)** convergence. এটা comparison test দিয়েই হয়ে যায়। **(2)** convergence.

Chapter V
Infinite series (part 2)

DAY 23
Series with arbitrary terms (part 1)

আগের অধ্যায়ে আমরা মূলতঃ positive term-ওয়ালা series নিয়ে আলোচনা করেছি। এই রকম series-এর প্রধান সুবিধা হল partial sum-এর sequence-টা হয় monotone increasing. তাই oscillate করতে পারে না, হয় converge করে, নয় ∞-তে diverge করে। এই অধ্যায়ে আমরা সেই সব series-দের নিয়েও কাজ করব যাদের মধ্যে positive, negative দুইরকম term-ই আছে।

23.1 Special case: Alternating series

Positive, negative মেলানো মেশানো series নিয়ে কাজ করা সব সময়ে সহজ হয় না। কিন্তু যদি positive আর negative term-গুলো একটা অন্তর একটা থাকে, তবে কাজটা অনেকটাই সহজ হয়ে যায়। এদের বলে alternating series.

Example 1: এদের মধ্যে কারা alternating series?

1. $1-2+3-4+-+-\cdots$
2. $-1+2-3+4-+-+\cdots$
3. $1+2-3-4+5+6-7-8++--\cdots$

SOLUTION:খালি প্রথম দুটো। তৃতীয়টায় $+$ আর $-$-গুলো একটা অন্তর একটা নেই, দুটো-দুটো করে আছে। ■

আমরা কোনো alternating series-কে $\sum(-1)^n a_n$ বা $\sum(-1)^{n+1}a_n$ আকারে লিখে থাকি যেখানে $a_n>0$. এখানে $(-1)^n$ লিখব না $(-1)^{n+1}$ লিখব সেটা নির্ভর করে প্রথম term-টা negative না positive তার উপর। Alternating series নিয়ে কাজ করার একটাই সুবিধা-- এদের জন্য একটা theorem আছে যেটা দিয়ে অনেক সময়েই convergence পরীক্ষা করা যায়। Theorem-টার নাম হল Leibniz's theorem বা কেউ কেউ বলে Leibniz's test. এর বক্তব্য এইরকম--

ধরো $\sum(-1)^n a_n$ একটা alternating series, যেখানে $a_n>0$. যদি $a_n\not\to 0$ হয় তবে আমরা আগেই শিখেছি যে series-টা converge করতে পারে না। কিন্তু যদি $a_n\to 0$ হয়, তবে? সেক্ষেত্রে জোর দিয়ে কিছু বলা যায় না। কিন্তু যদি $\{a_n\}_n$ একটা decreasing sequence-ও হয়, তবে কিন্তু জোর দিয়ে বলা যায় যে alternating series-টা converge করবেই। এইটাই হল Leibniz's test. এখানে convergence-এর জন্য তিনটে শর্ত লাগল--

1. Series-টাকে হতে হবে একটা alternating series $\sum(-1)^n a_n$, বা $\sum(-1)^{n+1}a_n$, যেখানে $a_n>0$.
2. $a_n\to 0$ হতে হবে।

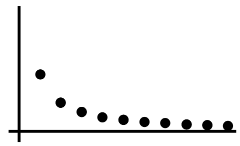


Fig 1

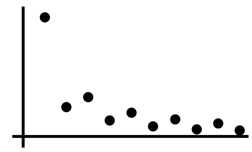


Fig 2

3. $\{a_n\}_n$-কে একটা decreasing sequence হতে হবে।

শেষের দুটো শর্তকে অনেকসময়ে লোকে এক সঙ্গে লেখে--"a_n decreases to 0."
এইদুটো ব্যাপারের পার্থক্যটা বোঝা যাক--"$a_n \to 0$" আর "a_n decreases to 0."

Example 2: এই sequence-টা দ্যাখো (Fig 1)--

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ldots$$

এটা 0-তে decrease করছে। কিন্তু এবার এই sequence-টা নিই--

$$2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{7}, \ldots$$

এটা আসলে প্রথম sequence-টারই সামান্য রূপান্তর। Odd (বিজোড়) term-গুলোকে খালি 2 দিয়ে গুণ করে দিয়েছি, even term-গুলোকে অপরিবর্তিত রেখে। এই sequence-টা convergent to 0, কিন্তু decreasing to 0 নয়, কারণ এটা 0-তে যাচ্ছে ওঠানামা করতে করতে (Fig 2). ■

এবার Leibniz test-এর প্রমাণটা শেখা যাক।

Exercise 1: State and prove Leibniz's test for convergence of an alternating series of real numbers.[1+3] ■

HINT:

Leibniz's test

If $\{a_n\}_n$ is a sequence of positive numbers decreasing to 0, then the alternating series $\sum(-1)^n a_n$ converges.

Proof: Let

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k.$$

আমাদের দেখাতে হবে যে S_n-গুলো converge করে। লক্ষ কর যে series-টা alternating হওয়ায় S_n-গুলো ক্রমাগত ওঠানামা করছে--S_1-এর চেয়ে S_2 বড়, তার চেয়ে ছোটো S_3, তার চেয়ে বড় S_4, এইরকম। আরও লক্ষ কর যে S_1 থেকে a_2 পরিমাণ উঠে S_2-তে পৌঁছব (Fig 3), সেখান থেকে a_3 পরিমাণ নেমে আসব S_3-তে। যেহেতু a_n-গুলো decrease করছে তাই $a_3 < a_2$, মানে যতটা উঠেছি, তার চেয়ে কম নেমেছি। তাই $S_1 < S_3$ হবে। একই যুক্তিতে $S_3 < S_5 < S_7 < \cdots$ হবে--

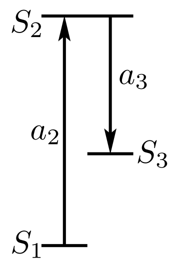


Fig 3

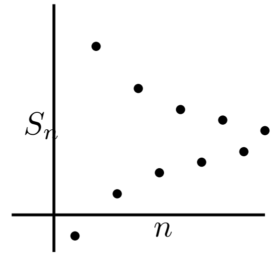


Fig 4

> Then
> $$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} > 0.$$

ঠিক একইভাবে $S_2 > S_4 > S_6 > \cdots$ হবে--

> Also,
> $$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} < 0.$$

তার মানে $\{S_{2n-1}\}_n$ হল একটা increasing sequence, আর $\{S_{2n}\}_n$ হল একটা decreasing sequence. গ্রাফ আঁকলে দেখাবে Fig 4-এর মত। লক্ষ কর এখানে $\{S_{2n}\}_n$ রয়েছে $\{S_{2n-1}\}_n$-এর উপরে। তাই $\{S_{2n}\}_n$ হল bounded below, আর $\{S_{2n-1}\}_n$ হল bounded above. সেটা ছবি দেখে বুঝছি, অংক কষে দেখানোও সহজ--

> Also,
> $$\begin{aligned} S_{2n} &= S_{2n-1} + a_{2n} > S_{2n-1} > S_1 \\ S_{2n+1} &= S_{2n} - a_{2n+1} < S_{2n} < S_2. \end{aligned}$$
> So $\{S_{2n}\}_n$ is a decreasing sequence bounded from below (by S_1), and $\{S_{2n-1}\}_n$ is an increasing sequence bounded from above (by S_2).
>
> So both the sequences must converge.

কারণ প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে bounded, monotone sequence-রা converge করে। এখনও দেখানো হয় নি যে $\{S_n\}_n$ পুরোটা converge করে, খালি দেখিয়েছি যে $\{S_{2n}\}_n$ আর $\{S_{2n-1}\}_n$ এই subsequence-দুটো converge করে। যদি দেখাতে পারি যে এদের দুজনেরই একই limit, তবে বলতে পারব যে পুরো $\{S_n\}_n$-টাই converge করে।

> Let
> $$S_{2n} \to L \text{ and } S_{2n-1} \to K.$$
> But $S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \to 0.$
>
> So $K = L.$
>
> Thus, $S_n \to L.$
>
> $\therefore \sum(-1)^n a_n$ converges, as required.

Exercise 2: State and prove Leibnitz's test on infinite series of real numbers.[1+4] ■

HINT:
আবার একই অংক। এখানে alternating series কথাটা উল্লেখ করে দেয়নি বটে, কিন্তু infinite series-এর জগতে Leibnitz's test বলতে ওই একটা জিনিসই বোঝায়।

Exercise 3: If $\{a_n\}_n$ is a nonincreasing sequence of positive numbers converging to zero, show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

is convergent.[4] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

Exercise 4: Prove that the following series are convergent.
(1) $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$ **(2)** $\sum(-1)^n\frac{1}{\log(n+1)}$ **(3)** $\sum\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+3}$
■

Exercise 5: Prove or disprove: If $\sum_n a_n$ is a convergent series of real numbers, then $\sum a_n^2$ is also convergent.[2] ■

HINT:
এই অংকের সমাধানটা একেবারেই সোজা, কিন্তু প্রশ্নটা একটু ধাঁধা লাগতে পারে। $\sum a_n$ যদি convergent হয়, তবে খামোখা লোকে $\sum a_n^2$-টা convergent কিনা তা নিয়ে মাথা ঘামাতে যাবে কেন? কারণটা এইরকম-- একটা infinite series-এর converge করাটা বেশ অদ্ভুত, এদিকে infinitely many সংখ্যা যোগ করা হচ্ছে, যার কোনো শেষ নেই, অথচ যোগফলটা দিব্যি ভালোমানুষ একটা সংখ্যা হয়ে যাচ্ছে। এমনটা নিশ্চয়ই তখনই হতে পারে যখন সংখ্যাগুলো খুব ছোটো হয়ে যাবে। অংক কষেও আমরা সেটা প্রমাণ করেছিলাম যে $\sum a_n$ যদি converge করে তবে $a_n \to 0$ হতে বাধ্য। সুতরাং একটা সময়ের পর থেকে $a_n \in (-1,1)$ হবে। এদিকে $(-1,1)$-এর মধ্যে যে কোনো সংখ্যার square আবার 0-র আরো কাছে চলে আসে। যেমন $\frac{1}{2}$-এর square হল $\frac{1}{4}$, সেটা 0-র বেশী কাছে। সুতরাং $\sum a_n$-ই যদি converge করে তবে কি $\sum a_n^2$-এর converge করাটাও প্রত্যাশিত নয়? এই প্রত্যাশাটা ঠিক না ভুল সেটা জানার কৌতূহল থেকেই এই অংকটার উৎপত্তি।
প্রত্যাশাটা আসলে ভুল। কারণ $\sum a_n$ যদি converge করে তবে $a_n \to 0$ হয় বটে, কিন্তু converge করার পিছনে সেটাই একমাত্র কারণ নাও হতে পারে। এমন হতেই পারে যে a_n-গুলোর মধ্যে positive, negative দুরকমই আছে, সেক্ষেত্রে নিজেদের মধ্যে কাটাকাটি হয়েও series-টা converge করে যেতে পারে। কিন্তু যেই a_n^2 নিলে, অমনি সবাই positive হয়ে গেল। ফলে কাটাকাটির সুবিধাটা আর রইল না। এই ব্যাপারটা যে সত্যিই হতে পারে সেটা একটা counterexample দিয়ে দেখালেই সমাধানটা হয়ে যাবে--

> No, the statement is not correct.
> Counterexample: Let $a_n = (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ for $n \in \mathbb{N}$.
> Then $\frac{1}{\sqrt{n}}$ decreases to 0 as $n \to \infty$.
> So, by Leibnitz's test, $\sum_n a_n$ converges.

But $\sum_n a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ is divergent (standard result).

23.2 General case

এবার আমরা general case-টা নিয়ে আলোচনা করব, মানে যেখানে আমাদের series-এ positive, negative সব রকম term-ই থাকতে পারে, এবং তারা একটা অন্তর একটা সাজানো নাও হতে পারে।

23.2.1 Absolute and conditional convergence

একটা series-এর সবগুলো term-কেই যদি জোর করে positive করে দিই, তবে যে নতুন series-টা পাব, তাকে বলে মূল series-টার **absolute series.** যেমন মূল series-টা যদি হয়--

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + - \cdots$$

তবে তার absolute series হবে--

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

"জোর করে positive করে দেওয়া" মানে হল absolute value নেওয়া, যেমন -5-এর মাইনাসটা বাদ দিলে থাকে $5 = |-5|$. তাই absolute series-এর definition লিখতে পারি এইভাবে--

> DEFINITION: **Absolute series**
>
> Let $\sum a_n$ be any infinite series. Then its absolute series is defined as $\sum |a_n|$.

যদি মূল series-টার সব term-ই nonnegative হয়, তবে অবশ্যই সেটা নিজেই নিজের absolute series হবে। কিন্তু positive, negative term মেশানো থাকলে মূল series আর absolute series সম্পূর্ণ দুটো আলাদা series. মূল series এবং absolute series-এর মধ্যে কিছু গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক আছে। এবার সে বিষয়ে গবেষণা করা যাক।

Example 3: এই দুটো series নাও--

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + - \cdots \text{ আর } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

এরা কি convergent? এদের absolute series দুটো বার কর। ওরা কি convergent?

SOLUTION: হ্যাঁ, মূল series দুটোই convergent. প্রথমজন হল geometric series যেখানে common ratio হল $-\frac{1}{2}$. আর দ্বিতীয়জনের convergence পাওয়া যাচ্ছে Leibniz test থেকে। এই প্রসঙ্গে বলে রাখি যে দ্বিতীয় series-টার একটা বহুলপ্রচলিত নাম আছে--**alternating harmonic series.**

এদের absolute series দুটো হল

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \text{ আর } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

এদের মধ্যে প্রথমজন এখনও geometric series আছে, খালি common ratio-টা এখন $\frac{1}{2}$. তাই প্রথম absolute series-টা convergent. কিন্তু দ্বিতীয়টা হল harmonic series, তাই divergent. ■

একটা series হতে পারে দুরকম-- convergent বা convergent নয়। তার absolute series-ও হতে পারে দুরকম-- convergent বা divergent. সুতরাং দুই-দুগুণে চাররকম সম্ভাবনা রয়েছে। Fig 5 দ্যাখো। এর মধ্যে কিন্তু আসলে খালি তিনটে সম্ভাবনাই বাস্তবে হতে পারে। এমনটা হওয়া অসম্ভব যে, absolute series-টা convergent কিন্তু মূল series-টা convergent নয়। যদি absolute series-টা converge করে তবে মূল series-টাও converge করতে বাধ্য! এই কথাটা আমরা কালকে প্রমাণ করব। এখন দুটো দরকারী definition সেরে নিই। Fig 6 দ্যাখো।

$\sum a_n$ \ $\sum \lvert a_n \rvert$	convgt	divgt
convgt	**সম্ভব**	**সম্ভব**
not convgt	**অসম্ভব**	**সম্ভব**

Fig 5

$\sum a_n$ \ $\sum \lvert a_n \rvert$	convgt	divgt
convgt	absolute convergence	conditional convergence
not convgt	**অসম্ভব**	কোনো নাম নেইকো আমার, শোনো মহাশয়!

Fig 6

> DEFINITION: **Absolute convergence**
>
> If $\sum |a_n| < \infty$, then $\sum a_n$ is called absolutely convergent.

> DEFINITION: **Conditional convergence**
>
> If $\sum |a_n| = \infty$, but $\sum a_n$ converges, then $\sum a_n$ is called conditionally convergent.

Exercise 6: Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1/2}$$

is convergent. Examine its absolute convergence.[1+1] ■

HINT:

এখানে series-টা দেখতে $\sum(-1)^n a_n$-এর মত যেখানে $a_n = n^{-1/2} > 0$. তার মানে alternating series. যেহেতু $n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ক্রমশঃ কমতে কমতে 0-তে যাচ্ছে তাই Leibniz test লাগানো যাবে--

> $\because n^{-1/2}$ decreases to 0,
>
> $\therefore$ by Leibniz's test, the given series is convergent.

এবার absolute convergence পরীক্ষা করতে হবে, মানে দেখতে হবে $\sum n^{-1/2} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ converge করে কি না। এটা দেখতে ঠিক $\sum \frac{1}{n^p}$-র মত যেখানে $p = \frac{1}{2} \le 1$.

> But absolute series is $\sum \frac{1}{n^p}$ where $p = \frac{1}{2} \le 1$. $\therefore$ it is divergent.
>
> So the given series is not absolutely convergent. It is conditionally convergent.

Exercise 7: Discuss the convergence of

$$\sum_n (-1)^n \frac{\log n}{n}.$$

[3] ■

HINT:

এই series-টা যে converge করে সেটা কিন্তু চোখে দেখেই বলতে পারা উচিত। তার জন্য একটা জিনিস খালি মাথায় রাখতে হবে--$n \to \infty$ হলে $\log n \to \infty$ হয়, কিন্তু n আর $\log n$-এর মধ্যে $\log n$-টা ∞-তে যায় অনেক আস্তে আস্তে। কেন হয় আন্দাজ করা কঠিন নয়, $\log n^2 = 2\log n$. মানে n যখন square হয়ে যায়, তখন $\log n$ মোটে দ্বিগুণ হয়।
সুতরাং $\frac{\log n}{n}$-এর পক্ষে শেষ পর্যন্ত উত্তরোত্তর ছোটো হয়ে 0-র দিকে যাওয়া ছাড়া পথ নেই। অতএব Leibnitz's test থেকেই series-টার convergence চলে আসবে। তার পরে অবশ্য absolute convergence-ও পরীক্ষা করে দেখতে হবে। কিন্তু আগে যেটুকু বললাম সেটাকে গুছিয়ে লিখে নিই--

> The given series is $\sum_n (-1)^n a_n$, where $a_n = \frac{\log n}{n} \geq 0$.
>
> We know that n goes to ∞ faster than $\log n$ does. So $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.
>
> Shall show that $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_{n+1} < a_n$.

অর্থাৎ কিনা $a_n \to 0$ বলেই ক্ষান্ত দিচ্ছি না। বাড়তি এও দাবী করছি যে একটা পর্যায়ের পর থেকে a_n-গুলো <u>decrease</u> করতে থাকে।

> Now
>
> $$\begin{aligned} a_{n+1} \lesseqqgtr a_n \quad &\iff \quad n\log(n+1) \lesseqqgtr (n+1)\log n \\ &\iff \quad \log(n+1)^n \lesseqqgtr \log n^{n+1} \\ &\iff \quad (n+1)^n \lesseqqgtr n^{n+1} \quad \left[\because \log \text{ is strictly increasing}\right] \\ &\iff \quad \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \lesseqqgtr 1 \\ &\iff \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \lesseqqgtr 1. \end{aligned}$$
>
> Now as $n \to \infty$ we have $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$. So $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \to 0$.
>
> $\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \leq 1$, and so $a_{n+1} < a_n$.
>
> Thus, by Leibnitz's test the given alternating series converges.

এবার absolute convergence পরীক্ষা করি--

> Now $\forall n \geq 3 \quad \log n > 1$, since $e < 3$.
>
> So $\forall n \geq 3 \quad a_n > \frac{1}{n}$.
>
> By standard result $\sum \frac{1}{n} = \infty$.
>
> So, by comparison test (inequality form), $\sum a_n = \infty$.

> Thus the given series is not absolutely convergent.
> Hence the given series converges conditionally.

Exercise 8: State Leibniz's test for convergence of alternating series. Prove that the series

$$\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\cdots$$

converges conditionally.[2+3] ■

HINT:
প্রথম অংশ আগেই করেছি। এবার দ্বিতীয় অংশ। দেখাই যাচ্ছে যে series-টা alternating. সুতরাং Leibniz test লাগানোর চেষ্টা করি--

> Second part:
> The given series is the alternating series $-\sum(-1)^n a_n$, where
> $$a_n=\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)+n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},\ \text{for } n\in\mathbb{N}.$$

এইভাবে লিখে নেওয়ায় "a_n decreases to 0" দেখাতে সুবিধা হবে। এখানে চট্ করে $a_n=\frac{2n+1}{n(n+1)}$ কি করে লেখা গেল সেটা অনেক ছাত্রই বুঝতে পারে না। কায়দাটা এরকম-- term-গুলো ভালো করে লক্ষ কর (চিহ্ন বাদ দিয়ে)। প্রতিটার নীচে পর পর দুটো সংখ্যার product (গুণফল) আছে। 1 নম্বর term-এ এরা হল $1,2$. আবার 2 নম্বর term-এ $2,3$. এইভাবে n নম্বর term-এ নীচের পরপর সংখ্যাদুটো হবে $n,n+1$. উপরের তলার সংখ্যাটা নীচের সংখ্যাদুটোর যোগফল, তাই n-th term-এর বেলায় উপর তলায় থাকবে $n+(n+1)=2n+1$.

> Now clearly, $a_n\to 0$.

কারণ $\frac{1}{n}\to 0$ এবং $\frac{1}{n+1}\to 0$.

> Also
> $$a_{n+1}-a_n=\left(\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2}\right)-\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}\right)=\tfrac{1}{n+2}-\tfrac{1}{n}<0.$$
> So $\{a_n\}_n$ is a decreasing sequence.
> Hence by Leibniz's test, the given series converges.

এবার absolute convergence পরীক্ষা করার পালা। এখানে

$$a_n=\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

উপর তলায় n-এর সর্বোচ্চ power হল n, আর নীচের তলায় n^2. তাই comparison করব $\sum\frac{n}{n^2}=\sum\frac{1}{n}$-এর সঙ্গে।

Also the absolute series is $\sum a_n$.
We know that $\sum \frac{1}{n} = \infty$.
$\because \frac{a_n}{1/n} \to 2$,
$\therefore$ By comparison test, $\sum a_n = \infty$.
Thus the given series is not absolutely convergent, but it is convergent.
Hence it is conditionally convergent, as required.

এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে একটা অংক শিখেছিলাম যে

$$u_n \to \ell \text{ হলে } \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) \to \ell$$

হয়। সেইটার সাথে Leibniz test মিশিয়ে নীচের অংকটা তৈরী।

Exercise 9: If $\{u_n\}_n$ is a strictly decreasing sequence of positive real numbers tending to zero, then show that the series

$$u_1 - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(u_1 + \cdots + u_n) + \cdots$$

is convergent.[3] ■

HINT:

Let

$$a_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n).$$

$\because u_n \to 0$
$\therefore$ By standard result, $a_n \to 0$.

এইখানেই আমরা প্রথম খণ্ডের সেই তথ্যটা ব্যবহার করলাম। এবার দেখাব যে $\{a_n\}_n$ একটা nonincreasing sequence. তাহলেই Leibniz test লাগানো যাবে।

Also $\{a_n\}_n$ is a nonincreasing sequence.

⟦ Because:

$$
\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \frac{1}{n}\sum_1^n u_k - \frac{1}{n+1}\sum_1^{n+1} u_k \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_1^n u_k - \frac{1}{n+1}u_{n+1} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_1^n u_k - \frac{1}{n+1}u_{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)}\left[\frac{1}{n}\sum_1^n u_k - u_{n+1}\right] \\
&> \frac{1}{n+1)}\left[u_n - u_{n+1}\right] \quad \left[\because \{u_n\}_n \text{ strictly decreasing}\right] \\
&> 0 \quad \left[\because \{u_n\}_n \text{ strictly decreasing}\right]
\end{aligned}
$$

⟧

So the result follows from Leibniz's test.

এই অংকটারই একটা প্রয়োগ হল নীচের অংকটা।

Exercise 10: Examine the convergence of

$$1 - \frac{1}{3}\left(1 + \tfrac{1}{3^2}\right) + \tfrac{1}{5}\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2}\right) - \cdots$$

[3] ■

HINT:

Define

$$u_n = \tfrac{1}{(2n-1)^2}.$$

Then the given series is $\sum(-1)^n \frac{1}{2n-1}(u_1 + \cdots + u_n)$.

এবার আগের অংকের মতই।

Exercise 11: Prove convergence of

$$1 - \tfrac{1}{3}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{1}{5}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + - + - \cdots.$$

■

Exercise 12: Examine absolute convergence of the series

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \cdots.$$

[3] ■

HINT:

> The absolute series is
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\cdots.$$
> Let S_n denote its n-th partial sum.
> We know that $\sum_2^\infty \frac{1}{n}=\infty$. Let T_n be its n-th partial sum.
> Then
> $$S_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}>T_n\to\infty.$$

এখানে '$>$' হল কারণ যদি cube-ওয়ালা term-গুলোকে বাদও দাও, তাহলে যা পড়ে থাকে সেটাই T_n.

> Since $S_{2n}\to\infty$, hence $\{S_n\}_n$ cannot converge.
> So the given series is not absolutely convergent.

এই অংকটায় খালি absolute convergence নিয়ে কাজ করতে বলেছিল, তাই সহজ ছিল। যদি খালি convergence পরীক্ষা করতে বলত? তবেও কিন্তু একইরকম যুক্তি খাটত। সেটাই রয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 13: Examine the convergence of the series
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

■

HINT:

> Let S_n be the n-th partial sum.
> Then
> $$S_{2n}=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n^3}\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(\tfrac{1}{k}-\tfrac{1}{k^3}\right)=\sum_{k=2}^{n}\underbrace{\tfrac{k^2-1}{k^3}}_{a_k,\ \text{say}}.$$
> Now $a_k/\frac{1}{k}\to 1$, and $\sum\frac{1}{k}=\infty$.
> So, by comparison test, $\sum a_k=\infty$.
> Thus $S_{2n}\to\infty$.
> Hence $\{S_n\}_n$ cannot converge.
> So the given series does not converge.

DAY 24
Series with arbitrary terms (part 2)

আজকে আমরা absolute convergence আর সাধারণ convergence-এর মধ্যে সম্পর্ক নিয়ে মাথা ঘামাব। একটা series-এর term-গুলো সব nonnegative হলে absolute convergence আর সাধারণ convergence সমার্থক। কিন্তু যদি positive, negative দুরকমের term-ই থাকে তবে absolute convergence-এর জোর বেশী, মানে একটা series যদি absolutely convergent হয় তবে সেটা convergent-ও হতে বাধ্য। কিন্তু এর converse-টা সত্যিই নয়, মানে এমন series সম্ভব যেটা convergent, কিন্তু absolutely convergent নয়। গতকালই এই সব কথা বলেছি। আজকে এগুলো প্রমাণ করব।

24.1 Absolute convergence $\implies$ convergence

Exercise 14: Show that every absolutely convergent series of real numbers is convergent. Is the converse of the statement true? Justify your answer.[3] ■

HINT:
একটা absolutely convergent series যে convergent-ও হবে সেটা মনে হয় যেন বলাই বাহুল্য। কিন্তু প্রমাণ করতে একটু প্যাঁচ আছে--Cauchy sequence কাজে লাগাতে হয়।

> Let $\sum a_n$ be any absolutely convergent series. Shall show that it is convergent.
>
> Let
> $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

দেখাতে হবে যে $\{S_n\}_n$ একটা convergent sequence. প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে real sequence-দের বেলায় Cauchy আর convergent সমার্থক। তাই--

> Enough to show that $\{S_n\}_n$ is a Cauchy sequence, *i.e.*,
>
> **Target** $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |S_m - S_n| < \epsilon.$
>
> $\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এইবার absolute series-টার partial sum-গুলোকে দেখি--

> Let
> $$T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$
>
> Then $\{T_n\}_n$ is a convergent (and hence Cauchy) sequence.
>
> $$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |T_m - T_n| < \epsilon.$$
>
> $\boxed{\exists N}$ Choose this N.

এর পরের কাজ সহজ--

$\forall m, n$ Take any $m, n \geq N$. Say, $n \leq m$. Then

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \\ &= T_m - T_n \\ &= |T_m - T_n| < \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

Second part:

No, the converse is not true. It is possible to have a convergent sequence that is not absolutely convergent.

Counterexample:

$\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ is a convergent series (by Leibniz's test), but it is not absolutely convergent, because $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$.

Exercise 15: If $\sum_n a_n$ is an absolutely convergent infinite series of real numbers, then prove that $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ converges absolutely. (Given that $a_n \neq -1$ for any n).[2] ■

HINT:

$\because \sum a_n$ converges absolutely,

$\therefore a_n \to 0$.

$\therefore 1 + a_n \to 1$.

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad 1 + a_n > \frac{1}{2}$.

Thus $\forall n \geq N$ we have $\frac{1}{1+a_n} \in (0, 2)$, and so

$$|[|\frac{a_n}{1+a_n}|]| \leq 2|a_n|.$$

Hence the required absolute convergence follows from comparison test with $\sum a_n$.

Exercise 16: Test for convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \sin \frac{n\pi}{2}\right)^n$.[3] ■

HINT:

Let $a_n = \left(\frac{1}{3}\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n$, and let $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Then $\sum b_n < \infty$ since it is a geometric series with common ratio $\frac{1}{3} \in (-1, 1)$.

Also $|a_n| = |[|\frac{1}{3}\sin\frac{n\pi}{2}|]|^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, since $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq 1$.

Thus, by comparison test (inequality form) we conclude that $\sum |a_n| < \infty$.

Thus the given sequence is absolutely convergent, and hence convergent.

24.2 Series-এর যোগ বিয়োগ

অনেক সময়ে দুটো series-কে যোগ করে একটা নতুন series বানাতে হয়। যেমন $\sum a_n$ আর $\sum b_n$-কে যোগ করে পাওয়া যায় $\sum(a_n + b_n)$. যদি $\sum a_n$ আর $\sum b_n$-এর আচরণ জানা থাকে তা থেকে আমরা $\sum(a_n + b_n)$-এর আচরণ সম্বন্ধে কি বলতে পারি? আশা করি এটা বুঝতে অসুবিধা হচ্ছে না যে, $\sum a_n$ আর $\sum b_n$ দুজনেই convergent হলে $\sum(a_n + b_n)$-ও convergent হবে। তার কারণ $\sum a_n$-এর partial sum-গুলোকে যদি S_n বলি, আর $\sum b_n$-এর partial sum-গুলোকে বলি T_n, তবে $\sum(a_n + b_n)$-এর partial sum-গুলো হবে

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + T_n.$$

সুতরাং $S_n \to L$ আর $T_n \to K$ হলে $U_n \to L + K$ হতে বাধ্য।
একই রকম কথা খাটে $\sum(a_n - b_n)$-এর ক্ষেত্রেও।

Exercise 17: আচ্ছা, ধরো $\sum a_n$ হল convergent, কিন্তু $\sum b_n$-টা convergent নয়। তবে কি $\sum(a_n + b_n)$-এর পক্ষে convergent হওয়া সম্ভব? ■

Exercise 18: যদি $\sum a_n$ আর $\sum b_n$ দুজনের কেউই convergent না হয়, তবে কি $\sum(a_n + b_n)$-এর পক্ষে convergent হওয়া সম্ভব? ■

এবার absolute convergence-এর প্রসঙ্গে আসি। দুটো absolute convergent series-কে যোগ করলে নতুন series-টা সবসময়েই absolute convergent হয়। এর প্রমাণটা হয় triangle inequality দিয়ে--

THEOREM

Sum of two absolutely convergent series is always absolutely convergent.

Proof:

Let $\sum |a_n| < \infty$ and $\sum |b_n| < \infty$.

So $\sum(|a_n| + |b_n|)$ is a convergent series.

Now, by triangle inequality, $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$. So by comparison test $\sum |a_n + b_n|$ is convergent, since the absolute series have nonnegative terms.

Hence $\sum(a_n + b_n)$ is absolutely convergent, as required.

∎

[Q.E.D]

Exercise 19: এই theorem-টার দিকে এক ঝলক তাকিয়েই বল তো $\sum a_n$ আর $\sum b_n$ দুজনেই absolutely convergent হলে $\sum(a_n - b_n)$-ও কি absolutely convergent হবেই? ■

Exercise 20: যদি $\sum a_n$ আর $\sum b_n$-এর মধ্যে ঠিক একজনই absolutely convergent হয়, তবে কি $\sum(a_n+b_n)$-এর পক্ষে absolutely convergent হওয়া সম্ভব? আর যদি $\sum a_n$ আর $\sum b_n$ কেউই absolutely convergent না হয়, তবে কি $\sum(a_n + b_n)$ কখনো absolutely convergent হতে পারে? ■

24.3 Positive আর negative অংশ

কোনো series-এর positive এবং negative দুই ধরণেরই term থাকলে positive আর negative-দের আলাদা করে নিলে অনেক সময়ে সুবিধা হয়। যেমন ধরো alternating harmonic series-টা--

$$S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + + - + + - \cdots .$$

এর মধ্যে positive term-গুলোকে ছেঁকে তুলে নিলে পাব--

$$P = 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + 0 + \cdots .$$

লক্ষ কর negative term-গুলোর জায়গায় 0 বসিয়ে দিয়েছি। একইভাবে negative অংশটা হবে

$$N = 0 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + 0 + \frac{1}{6} + \cdots .$$

এখানে দুটো জিনিস করা হয়েছে--এক, positive term-গুলো মুছে 0 করে দেওয়া হয়েছে, আর দুই, negative term-গুলোর চিহ্ন উল্টে দেওয়া হয়েছে। এই চিহ্ন উল্টে দেওয়ার কারণ হল যাতে N-series-টার সব term-ই হয় nonnegative, কারণ nonnegative term-ওয়ালা series নিয়ে কাজ করা সুবিধাজনক (absolute আর conditional convergence নিয়ে আলাদা করে মাথা ঘামাতে হয় না)। লক্ষ কর যে P আর N series দুটো converge করলে

$$S = P - N$$

হবে। আমরা যেটা করলাম সেটাকে অংকের ভাষায় লিখলে হবে এরকম-- ধরো $S = \sum a_n$. আমরা এর positive আর negative অংশ আলাদা করব এইভাবে--

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{if } a_n > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{আর } a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{if } a_n < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

একই জিনিস অন্যভাবেও লেখা যায়--

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n) \text{ আর } a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n)$$

লক্ষ কর যে $a_n = a_n^+ - a_n^-$ আর $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. এই যে তিনটে series এখন আমাদের হাতে রয়েছে

$$S = \sum a_n \quad P = \sum a_n^+ \text{ আর } N = \sum a_n^-,$$

এদের মধ্যে নিবিড় সম্পর্ক আছে--

- S absolutely convergent $\iff P, N$ দুজনেই convergent এই ক্ষেত্রে $S = P - N$.
- S conditionally convergent $\implies P, N$ দুজনেই divergent

এর মধ্যে প্রথমটার $\implies$ অংশটার প্রমাণ রয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 21: Prove that an absolutely convergent series can be expressed as the difference of two convergent series of positive real numbers.[4] ■

HINT:

> Let $\sum a_n$ be an absolutely convergent series. Then $\sum a_n$ and $\sum |a_n|$ are both convergent.
>
> Define
> $$a_n^+ = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|) \geq 0 \text{ and } a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) \geq 0.$$
> Then $a_n = a_n^+ - a_n^-$.
>
> Since sum and difference of convergent series are again convergent, so $\sum a_n^+$ and $\sum a_n^-$ are convergent.
>
> Now
> $$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-,$$
> as required.

Exercise 22: If P and N both converge, then prove that S is absolutely convergent. ■

একটা convergent series-এর সঙ্গে একটা divergent series-কে যোগ করলে নতুন series-টা divergent হয়। এই কথাটাকে মনে রেখে নীচের অংকটা কর।

Exercise 23: If S is conditionally convergent, then show that P and N both diverge. ■

আর যদি P, N দুজনেই diverge করে? তাহলে কি কি হতে পারে তার খবর আছে নীচের অংকটায়।

Exercise 24: Give examples of $\sum a_n$ such that $\sum a_n^+ = \infty$, $\sum a_n^- = \infty$, and

1. $\sum a_n$ converges.
2. $\sum a_n = \infty$.
3. $\sum a_n = -\infty$.
4. $\sum a_n$ oscillates.

■

HINT:

প্রথম অংকটার সমাধানটা খুবই সহজ। যদি $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ নিই, তবে Leibniz test থেকে $\sum a_n$ হবে convergent. কিন্তু $\sum a_n^+$ আসলে $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$, তাই divergent. আর $\sum a_n^-$ হল $\sum \frac{1}{2n-1}$, এবং $\sum \frac{1}{n}$-এর সঙ্গে comparison test লাগালেই দেখবে যে $\sum a_n^- = \infty$.
বাকী অংশগুলো এবার নিজে করার চেষ্টা কর।

DAY 25
Series with arbitrary terms (part 3)

25.1 Limits and rates

একটা infinite series $\sum a_n$ converge করার মানে কি? আমরা আগের অধ্যায়েই এর উত্তর শিখেছি। এর জন্য আমাদের এর partial sum-গুলো, মানে

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

নিয়ে দেখতে হবে $\{S_n\}_n$ sequence-টা converge করে কি না। যদি $S_n \to \ell$ হয় তবে আমরা বলি $\sum a_n$ converge করে-- $\sum a_n = \ell$. কখনো ℓ-কে বলি $\sum a_n$-এর sum (যোগফল), কখনও বলি $\sum a_n$-এর limit. এই ক্ষেত্রে "sum" আর "limit" শব্দদুটো সমার্থক হিসেবে ব্যবহৃত হয়।
আমরা এতক্ষণ বিভিন্ন infinite series-এর convergence নিয়ে আলোচনা করেছি, কিন্তু প্রায় কোনো ক্ষেত্রেই limit-টা ঠিক কি হবে সে বিষয়ে কিছুই উল্লেখ করিনি। যেমন আমরা বলেছি যে, $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$. কিন্তু এই $\sum \frac{1}{n^2}$-এর sum-টা ঠিক কত সে বিষয়ে আমরা নীরব থেকেছি। তার প্রধান কারণ হল একটা series দেওয়া থাকলে convergence পরীক্ষা করা অপেক্ষাকৃত সহজ, কিন্তু convergent জানার পরেও তার limit বার করা সাধারণতঃ অনেক বেশী কঠিন। কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে limit-টা খুব কষ্ট না করেও বার করা যায়। এরকম কয়েকটা উদাহরণ এবার আলোচনা করব।

25.1.1 Geometric series

যে infinite series -এর limit সবচেয়ে অনায়াসে বার করে ফেলা যায়, সেটা হল geometric series, কারণ আমরা জানি যে, যদি $-1 < r < 1$ হয়, তবে

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

একদম সোজা একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি। **Example 4:** এই series-টার যোগফল কি হবে--

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots?$$

SOLUTION: এখানে series-টা হল $1 + r + r^2 + \cdots$, যেখানে $r = \frac{1}{2}$. তাই যোগফলটা হবে

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

■

Exercise 25: নীচের series-গুলোর যোগফল বার কর।

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

3. $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$
4. $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$

■

25.1.2 Taylor/Maclaurin series

আরেক ধরণের series-এর ক্ষেত্রেও limit বার করা যায়, সেগুলো আসে Taylor series বা Maclaurin series থেকে। যেমন, আমরা তৃতীয় অধ্যায়ে দেখেছিলাম যে, e^x-এর Maclaurin series হল

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

এবং এই series-টা x-এর যে কোনো value-তেই e^x-এ converge করে। এখানে x-এর যে কোনো value বসালেই আমরা নানা রকমের series পাব, যাদের যোগফল আমরা জানি। যেমন, যদি $x=1$ বসাই তবে পাব

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots,$$

এবং এর যোগফল হবে $e^x=e^1=e.$ যদি series-টা দিই এইরকম--

$$1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\cdots,$$

তবে অমনি তুমি চট্ করে চিনে ফেলবে যে এটা আসলে e^x-এর series-টাই, যেখানে $x=\frac{1}{2}$. তার মানে এই series-টার যোগফল হবে $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$
এই রকম বিভিন্ন series মিলিয়ে মিশিয়ে আরও নানারকম series বানানো যায়। নীচের অংকটায় এরকম কয়েকটার হদিশ দেওয়া আছে।

Exercise 26: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে series-টার যোগফল বার কর।

1. $\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\cdots$
2. $1+\frac{\log 2}{1!}+\frac{(\log 2)^2}{2!}+\cdots$
3. $1+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}+\frac{a^6}{6!}+\cdots$
4. $\frac{a}{1!}+\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}+\cdots$

■

এই রকমভাবে Maclaurin series ব্যবহার করার প্রধান ঝকমারি হল infinite series-টা দেখে সেটা কোন function-এর Maclaurin series সেটা আন্দাজ করতে পারা। তাছাড়া যে কোনো infinite series-কেই যে কারো না কারো Maclaurin series হিসেবে লেখা যাবেই এমনও কোনো কথা নেই। কিন্তু অনেক সময়ে চেনা function-এর Maclaurin series-ও চিনতে কষ্ট হয়। এরকম একটা উদাহরণ দেখি। এটা আমাদের পরে কাজে লাগবে। **Example 5:** আমরা Leibniz test

থেকে জানি যে alternating harmonic series

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+-+\cdots$$

converge করে। এর যোগফলটা কত হবে?

SOLUTION: এর জন্য কাজে লাগবে $\log(1+x)$-এর Maclaurin series–

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots \quad \text{for} \quad -1 < x \leq 1.$$

যদি এখানে $x = 1$ বসাই তবে পাব--

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots = \log 2.$$

তার মানে alternating harmonic series-এর sum হল $\log 2$. ■

আমরা একইভাবে binomial series-ও ব্যবহার করতে পারি--

$$(1+x)^a = \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots \quad \text{for} \quad |x| < 1.$$

এই $\binom{a}{n}$ চিহ্নটার মানে মনে আছে নিশ্চয়ই?

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

উপরতলার a-টা যে কোনো real সংখ্যা হতে পারে, নীচের n-টাকে হতে হবে একটা nonnegative integer, মানে $0, 1, 2, \ldots$ ইত্যাদি। এটা মনে রাখার সোজা কায়দা হল এই--উপরতলায় a থেকে শুরু করে এক এক করে কমাতে থাকো, $a, a-1, a-2$ এইভাবে। এই ভাবে n বার করলে যে n-খানা সংখ্যা পাবে তাদের গুণফলই হল numerator-টা। আর denominator-টা তো আরো সহজ, খালি $n!$. যদি $n = 0$ হয় তবে যে কোনো a-র জন্যই

$$\binom{a}{0} = 1.$$

Exercise 27: Prove $\binom{-2}{n} = (-1)^n(n+1)$. ■

Example 6: Use the Maclaurin series for $(1-x)^{-2}$ for $|x| < 1$ to find the sum $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}$.

SOLUTION: কোন Maclaurin series-টা ব্যবহার করতে হবে সেটা বলে দেওয়া না থাকলে এই অংকটা করা বেশ কঠিন হত।

> We know that the Maclaurin series for $(1-x)^{-2}$ is
>
> $$\begin{aligned}(1-x)^{-2} &= \binom{-2}{0} - \binom{-2}{1}x + \binom{-2}{2}x^2 - + - + \cdots \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots\end{aligned}$$

কষে দ্যাখো, ঠিক এটাই আসবে!

> Putting $x = \frac{1}{9}$, we see that the given series has sum
>
> $$(1-x)^{-2} = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{-2} = \frac{81}{64}.$$

■

Exercise 28: Prove $\binom{-3}{n} = \frac{1}{2}(-1)^n(n+1)(n+2)$. ■

Exercise 29: Use the Maclaurin series for $(1-x)^{-3}$ for $|x| < 1$ to find the sum $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{5^n}$. ■

Exercise 30: $\sin x$-এর Maclaurin series-টা লেখো। তার পর সেখানে $x = \pi$ বসালে কি infinite series পাও দ্যাখো। এটার limit কি হবে? ■

Exercise 31: এই series-টার limit বার কর--

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + - + - \cdots .$$

■

25.1.3 Rate of harmonic series

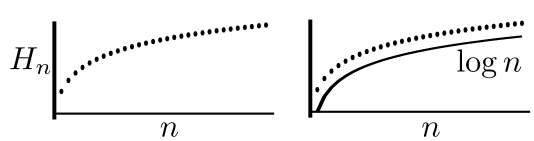
যেসব series converge করে না তাদের ক্ষেত্রে অবশ্যই limit বার করার প্রশ্ন নেই। যেমন ধরো harmonic series-এর কথা। যদি তার partial sum-গুলোকে H_n বলি, মানে যদি

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

নিই, তবে আমরা জানি যে $H_n \to \infty$. এবার একটা অদ্ভুত কাজ করব-- H_n-গুলোকে গ্রাফের মত করে আঁকব। Fig 7-এর উপরের ছবিটা দ্যাখো। লক্ষ কর ডট্‌গুলো দেখতে বেশ একটা সুন্দর curve-এর মত লাগছে। এই curve-এর চেহারাটা কিন্তু আমাদের অপরিচিত নয়। এটা হল ঠিক $\log n$-এর গ্রাফ-এর মত। তুলনা করার সুবিধার জন্য আমরা Fig 7-এর নীচের ছবিটায় $\log n$ আর H_n-কে একসাথে এঁকেছি। দেখতেই পাচ্ছো যে, ডট্‌গুলো আর curve-টা সমান তালে এগোচ্ছে। তাই অংকের ভাষায় আমরা বলি যে H_n-এর diverge করার rate হল $\log n$-এর মত। লক্ষ কর n যতই বাড়ছে ততই H_n-এর ডট্‌গুলো আর $\log n$-এর curve-টা ক্রমশঃই সমান্তরাল হয়ে উঠছে। যদি এদের দুজনের পার্থক্যটাকে γ নাম দিই তবে বলতে পারি যে

$$H_n - \log n \to \gamma \text{ as } n \to \infty.$$

Fig 7



Exercise 32: হাতের কাছে ক্যালকুলেটর থাকলে $n = 5$-এর জন্য $H_5 - \log 5$ কষে দেখতে পারো। তা থেকে γ-র value বিষয়ে একটা ধারণা পাবে। খালি ক্যালকুলেটর চালানোর সময়ে মনে রেখো যে এখানে log হল আসলে $\log_e$. ■

একই জিনিস এবার আমরা অংক কষে প্রমাণ করব।

Exercise 33: A sequence $\{x_n\}_n$ is defined as follows:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log_e n.$$

Show that $\{x_n\}_n$ is convergent.[3] ■

HINT:
এই অংকটার সমাধানে নানা রকমের প্যাঁচ আছে। খুব সাবধানে পড়। আমরা দুধাপে এগোব, প্রথমে দেখাব যে, $\{x_n\}_n$ একটা decreasing sequence, তারপর দেখাব যে $\{x_n\}_n$ হল bounded from below. কোনো decreasing sequence যদি bounded from below হয় তবে সেটা converge করতে বাধ্য, তাই এতেই convergence প্রমাণ হয়ে যাবে।

> Step 1: Shall show that $\{x_n\}_n$ is a decreasing sequence.

তার মানে দেখাব যে সবসময়েই $x_{n+1} - x_n \leq 0$ হবে। আমাদের কাজ হল $x_{n+1} - x_n \leq 0$ দেখানো। তার জন্য লক্ষ কর $x_{n+1} - x_n$-কে কাটাকুটি করে বেশ গুছিয়ে লেখা যায়--

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(\underbrace{1 + \tfrac{1}{2} + \cdots \tfrac{1}{n}} + \tfrac{1}{n+1} - \log(n+1)\right) \\ &\quad - \left(\underbrace{1 + \tfrac{1}{2} + \cdots \tfrac{1}{n}} - \log n\right) \\ &= \tfrac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n \\ &= \tfrac{1}{n+1} - \log\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{t}{1+t} - \log(1+t) \quad \left[\text{taking } t = \tfrac{1}{n} > 0\right] \end{aligned}$$

আমাদের তার মানে দেখাতে হবে যে $\frac{t}{1+t} - \log(1+t) \leq 0$. এর জন্য mean value theorem লাগাব। যখনই এই ধরণের বিদ্‌ঘুটে দেখতে inequality প্রমাণ করতে হয়, তখনই একবার mean value theorem লাগানোর চেষ্টা করা ভালো। অনেক সময়েই এতে অপ্রত্যাশিতভাবে কাজ হয়!
Mean value theorem লাগানোর জন্য আমরা $\log(1+t)$-কে লিখব $\log(1+t) - \log 1$ হিসেবে (মনে রেখো $\log 1 = 0$). সুতরাং এটা দেখতে ঠিক $f(b) - f(a)$-র মত, যেখানে $f(x) = \log x$ আর $a = 1$, $b = 1 + t$. আমরা জানি যে, $\log x$ একটা চমৎকার function, যার continuity, differentiability নিয়ে সন্দেহমাত্র নেই!

> Now
>
> $$\begin{aligned} \log(1+t) &= \log(1+t) - \log 1 \\ &= f(b) - f(a) \quad \left[\text{taking } f(x) = \log x, a = 1, b = 1 + t\right] \\ &= = f'(\xi)(b-a), \quad [\text{by MVT}] \end{aligned}$$

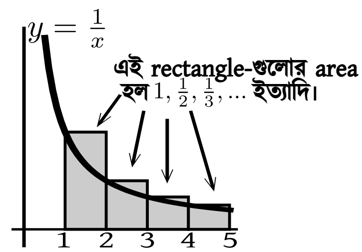


Fig 8

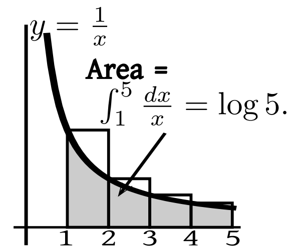


Fig 9

> for some $\xi \in (a, b)$, since $f(x)$ is continuous over $[a, b]$, differentiable over (a, b).
> $\because f'(x) = \frac{1}{x}$,
> $\therefore \log(1+t) = \frac{1}{\xi}\left[(1+t) - 1)\right] = \frac{t}{\xi}$.

কিন্তু আমরা জানি যে $\xi \in (1, 1+t)$. তাই $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+t}$. সুতরাং--

> $$\log(1+t) = \frac{t}{\xi} \geq \frac{t}{1+t},$$
> since $\xi \in (1, 1+t)$ and $t > 0$.
> $\therefore x_{n+1} - x_n \leq 0$, as required.

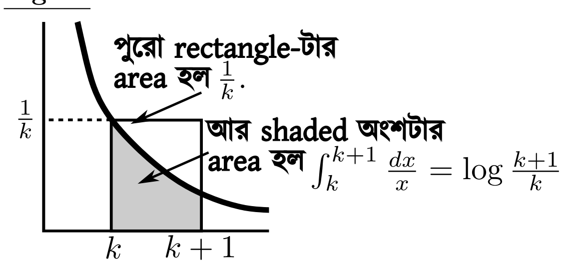
এবার দ্বিতীয় ধাপ। এখানে দেখাব যে $\{x_n\}_n$ হল bounded from below. তার জন্য আবার একটা ছোট্টো কৌশল লাগাব, যেটা ছবি দিয়ে বুঝতে সহজ। Fig 8 দ্যাখো। এখানে $y = \frac{1}{x}$-এর গ্রাফটা এঁকেছি, এবং তার গায়ে মাথা ঠেকিয়ে কয়েকটা rectangle খাড়া করেছি। বুঝতেই পারছ যে এরকম n-খানা rectangle-এর area যোগ করলেই আমরা H_n পাব। যেমন ছবির চারটে rectangle-এর area যোগ করলে পাব

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

এবার দেখি $y = \frac{1}{x}$-এর গ্রাফের তলার area-টা কত, যেটা Fig 9-এ shaded করে দেখানো হয়েছে। এই দুটো ছবির মধ্যে কোনটার shaded area-টা বেশী বড়? বলাই বাহুল্য প্রথমটার, কারণ $y = \frac{1}{x}$-এর গ্রাফটা rectangle-গুলোর তলায় চাপা পড়ে গেছে। তার মানে

$$H_4 > \log 5 \text{ বা } H_4 - \log 5 > 0.$$

Fig 10



যদি চারটের বদলে n-খানা rectangle নিয়ে কাজ করতাম তবে একইভাবে পেতাম

$$H_n - \log(n+1) > 0.$$

কিন্তু একটু মুস্কিল রয়ে গেল যে! আমাদের তো কাজ করার কথা $H_n - \log n$ নিয়ে, এখানে যে $\log(n+1)$ এসে গেল! কিন্তু তাতে আসলে কোনো অসুবিধা নেই, কারণ $\log(n+1) > \log n$. তাই

$$H_n - \log n > H_n - \log(n+1) > 0,$$

মানে 0 হল $\{x_n\}_n$-এর একটা lower bound.

> Step 2: Shall show that $\{x_n\}_n$ is bounded from below by 0.

এবার তবে অংক কষে প্রমাণ করার পালা। ছবি দেখেই বুঝে রেখেছি যে প্রতিটা rectangle-ই $y = \frac{1}{x}$-এর গ্রাফের উপরে মাথা তুলেছে। Fig 10 দেখলেই বুঝবে যে তার মানে এইটা দেখাতে পারা উচিত--

$$\frac{1}{k} > \log\frac{k+1}{k}.$$

এর সবচেয়ে সহজ উপায় হল এইটা লক্ষ করা যে,

$$\forall x \in [k, k+1] \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

অর্থাৎ, গ্রাফটা আছে rectangle-এর ছাদের নীচে। সুতরাং দুই দিককে integrate করে area বার করলেই পাব--

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k},$$

বা

$$\log\frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}. \qquad (*)$$

কিন্তু আমরা এই সহজ পথটা নেব না, কারণ এখনও পর্যন্ত আমরা এই বইতে বা এই বইয়ের প্রথম খণ্ডে integration-এর সংজ্ঞা অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখি নি। সেই কাজটা করব তৃতীয় খণ্ডে গিয়ে। কিন্তু তাতে আপাততঃ কোনো অসুবিধা হবে না, কারণ integration ছাড়াও (*) প্রমাণ করা যায় mean value theorem দিয়ে, যদিও তাতে ছবি এঁকে বোঝার মজাটা পাওয়া যায় না।

> We shall first show that
>
> $$\frac{1}{k} \geq \log\tfrac{k+1}{k},$$
>
> ie, taking $t = \frac{1}{k}$,
>
> $$t \geq \log(1+t).$$
>
> Now by mean value theorem
>
> $$\log(1+t) = \log(1+t) - \log 1 = \frac{1}{\xi}[(1+t) - 1)],$$
>
> for some $\xi \in (1, 1+t)$. So
>
> $$\log(1+t) = \frac{t}{\xi} < t,$$

Since $\xi > 1$.

এতক্ষণ আমরা খালি একটা rectangle নিয়ে কাজ করছিলাম, এবার n-খানা rectangle-এর area যোগ করব।

So
$$\left(1-\log\tfrac{2}{1}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\log\tfrac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{n}-\log\tfrac{n+1}{n}\right)\geq 0,$$

Now
$$\begin{aligned}
& \left(1-\log\tfrac{2}{1}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\log\tfrac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{n}-\log\tfrac{n+1}{n}\right)\\
= & \ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\\
& \quad -[(\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)+\cdots+(\log(n+1)-\log n)]\\
= & \ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}-\log(n+1).
\end{aligned}$$

So
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\geq 0.$$

Hence
$$\begin{aligned}
x_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\geq 0.
\end{aligned}$$

So $\{x_n\}_n$ is bounded from below by 0, as required.

DAY 26
Series with arbitrary terms (part 4)

26.1 Grouping

আমরা জানি যে, addition হল associative, যেমন $2, 3$ আর 4 যোগ করতে হলে তুমি $(2+3)+4$-ও করতে পারো, আবার $2+(3+4)$-ও করতে পারো, দুভাবেই উত্তর একই আসবে। কিন্তু infinite series-এর বেলায় এ জিনিসটা সব সময়ে খাটে না।

Example 7: ধরো একটা series নিলাম $\sum a_n$ যেখানে $a_n = (-1)^n$. অর্থাৎ

$$\sum a_n = -1+1-1+1-+-+\cdots.$$

এর partial sum-গুলো হল--

$$\begin{aligned}
S_1 &= && -1\\
S_2 &= S_1+1 = && 0\\
S_3 &= S_2-1 = && -1\\
S_4 &= S_3+1 = && 0\\
S_5 &= S_4-1 = && -1, \text{ ইত্যাদি।}
\end{aligned}$$

দেখাই যাচ্ছে যে, $\{S_n\}$ হল একটা oscillating sequence, তার মানে $\sum a_n$ মোটেই converge করে না।
এবার a_n-গুলোকে দুটো-দুটো করে group করি--

$$(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots.$$

এটা এমন একটা series যার প্রতিটি term-ই হল $(-1+1)=0$. সুতরাং series-টা অবশ্যই 0-তে converge করতে বাধ্য! ■

Group করার ফলে oscillating series-টা কি করে converge করে গেল সেটা বোঝা কঠিন নয়। আমাদের গোড়ার series-টাকে যদি লিখি

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots,$$

তবে group করার পর হল

$$\underbrace{(a_1+a_2)}_{b_1}+\underbrace{(a_3+a_4)}_{b_2}+\cdots.$$

মূল series-টার partial sum-রা ছিল

$$S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\quad S_3=a_1+a_2+a_3,...$$

আর group করার পর নতুন partial sum-রা হল

$$T_1=b_1,\quad T_2=b_1+b_2,\quad T_3=b_1+b_2+b_3,...$$

লক্ষ কর যে,

$$\begin{aligned}
T_1 &= & b_1 &= (a_1+a_2) & &= S_2\\
T_2 &= & b_1+b_2 &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4) & &= S_4\\
T_3 &= & b_1+b_2+b_3 &= (a_1+a_2)+\cdots+(a_5+a_6) & &= S_6,\ \text{ইত্যাদি।}
\end{aligned}$$

তার মানে $T_n=S_{2n}$, অর্থাৎ $\{T_n\}_n$ হল $\{S_n\}_n$-এর একটা subsequence. আমরা এ বইয়ের প্রথম খণ্ডে শিখেছিলাম যে একটা sequence যদি oscillate করে তার সব subsequence-ই যে oscillate করবে এমন কথা নেই, কেউ কেউ converge-ও করতে পারে। এখানে $\{T_n\}_n$ হল ঠিক সেরকম একটা subsequence, দুর্বিনীত বাবামায়ের ভদ্র-সভ্য সন্তান!

Exercise 34: Show that the series

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\frac{6}{5}+\cdots$$

is not convergent, but the series

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\cdots$$

is convergent. Give reason for obtaining different nature of the series before and after grouping the terms.[4] ■

HINT:

> The original series is $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, where
> $$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 2.$$
> $\because |a_n| \to 1 \neq 0$,
> $\therefore a_n \not\to 0$ as $n \to \infty$.
> $\therefore \sum a_n$ cannot converge.

কারণ converge করার জন্য general term-কে 0-তে যেতে হয়। এবার grouped series-টাকে দেখি--

> The grouped series is $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ where
> $$\begin{aligned} b_n &= a_{2n} + a_{2n+1} \\ &= \frac{2n+1}{2n} - \frac{2n+2}{2n+1} \\ &= \frac{(2n+1)^2 - 2n(2n+2)}{2n(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)}. \end{aligned}$$
> We know that $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$. Also $b_n > 0$ and
> $$\frac{b_n}{1/n^2} \to \frac{1}{4} < \infty.$$
> So, by comparison test, $\sum b_n < \infty$, as required.

এবার লিখব grouping-এর ফলে আচরণ পরিবর্তনের কারণটা--

> Reason: Let $\{S_n\}_n$ and $\{T_n\}_n$ be the sequences of partial sums of $\sum a_n$ and $\sum b_n$.
> Then $\{T_n\}_n$ is a subsequence of $\{S_n\}_n$.
> Since $\{S_n\}_n$ is an oscillating sequence, it can have different subsequences that converge to different values. $\{T_n\}_n$ is one possible convergent subsequence.

26.1.1 Ungrouped থেকে grouped

ধরো একটা series আছে $\sum a_n$. সেটাকে কোনোভাবে group করে একটা নতুন series পেলাম $\sum b_n$. একটা উদাহরণ এরকম হতে পারে--

$$\underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5)}_{b_2} + \underbrace{(a_6 + a_7)}_{b_3} + \cdots.$$

প্রশ্ন হল $\sum a_n$-এর আচরণ (মানে converge করে নাকি diverge করে, না oscillate করে) জানা থাকলে আমরা $\sum b_n$-এর আচরণ বিষয়ে কি সিদ্ধান্ত করতে পারি? মানে ungrouped series থেকে grouped series -এর আচরণ কতটা জানা যায়? আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে, grouped series-টার partial sum-রা হল ungrouped series-টার partial sum-এর একটা subsequence. সুতরাং এখানে প্রশ্ন হল--একটা sequence-এর কি কি বৈশিষ্ট্য তার subsequence-দের মধ্যে বর্তায়?

আমরা জানি যে একটা oscillating sequence-এর সব subsequence-ই oscillating হয় না। তাই এমন হতেই পারে যে ungrouped series-টা oscillate করে, কিন্তু group করার পর হয়তো converge করে। এরকম উদাহরণ আমরা একটু আগেই দেখেছি।

কিন্তু একটা sequence যদি convergent হয় তবে তার যাবতীয় subsequence-ই সেই একই limit-এ converge করে (ভদ্রসভ্য বাবামায়ের সন্তানরা সবসময়েই ভদ্র হয়)।

সুতরাং যদি $\sum a_n$ গোড়াতেই একটা convergent series হত তবে হাজার group করার পরেও তার limit বদলাত না। এই কথাটাই নীচের theorem-এ বলা হয়েছে।

> **THEOREM**
>
> If $\sum a_n$ is a convergent series, then any grouping will converge to the same limit.

Exercise 35: Ungrouped series-টা যদি diverge করে, তবে কি জোর দিয়ে বলতে পারো যে grouped series-টাও diverge করবে? ■

26.1.2 Grouped থেকে ungrouped

এবার উল্টো প্রশ্নটায় আসি--যদি grouped series-এর আচরণ জানা থাকে তবে তা থেকে ungrouped series-এর আচরণ বিষয়ে কি বলতে পারি?

Partial sum-এর sequence দিয়ে চিন্তা করা যাক। Grouped series-এর partial sum-রা হল ungrouped series-এর partial sum-দের একটা subsequence. তার মানে এখানে প্রশ্ন হল একটা subsequence-এর আচরণ থেকে পুরো sequence-টার আচরণ বার করা যায় কি না।

Example 8: যদি grouped series-টা converge না করে, তবে ungrouped series-টা কি converge করতে পারে?

SOLUTION: না, কারণ ungrouped series-টা converge করলে তো যাবতীয় grouped series-ও converge করত। ■

Example 9: যদি grouped series-টা converge করে, তবে কি ungrouped series-টা converge করতে বাধ্য?

SOLUTION: না, জোর দিয়ে বলা যায় না। যেমন

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

হল আসলে $0+0+\cdots$, তাই 0-তে converge করে, কিন্তু ungrouped series-টা হল

$$1-1+1-1+1-1+-+-\cdots,$$

যেটা oscillate করে। ■

আমরা দুটো গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্র শিখব যেখানে grouped series-এর convergence থেকে আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে ungrouped series-টাও converge করবে। প্রথম ক্ষেত্রটা হল যেখানে প্রতিটি term-ই positive. এখানে তবে partial sum-এর sequence-টা হবে increasing. আমরা জানি যে একটা monotone sequence-এর বেলায় একটা subsequence converge করলেই পুরো sequence-টা ওই একই limit-এ converge করতে বাধ্য। এ বইয়ে প্রথম খণ্ডে sequence নিয়ে যা শিখেছিলে তার ভিত্তিতে এই কথাটা প্রমাণ করা কঠিন নয়--

Exercise 36: Prove that if $\{a_n\}_n$ is any monotone sequence, and $\{a_{n_k}\}_k$ is some subsequence where $a_{n_k} \to \ell$, then $a_n \to \ell$. ■

এ থেকেই নীচের theorem-টার জন্ম।

> **THEOREM**
>
> If $\sum a_n$ is a series of positive terms, and if at least one grouping converges, then the ungrouped series must converge to the same limit.

Exercise 37: If $\sum a_n$ is a series of positive terms, and at least one grouping diverges, then show that the ungrouped series must also diverge. ■

এবার দ্বিতীয় ক্ষেত্রটায় আসি যেখানে একটা grouped series-এর আচরণ থেকে ungrouped series-এর আচরণ বলা যায়। এবার আর $a_n > 0$ হবার কোনো দরকার পড়ে না। তবে এক্ষেত্রে $a_n \to 0$ হতে হবে, আর প্রতিটা গ্রুপেই ঠিক সমান সংখ্যক term থাকতে হবে, যেমন

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + \cdots .$$

এখানে প্রতিটি গ্রুপেই ঠিক তিনটে করে term আছে। কিন্তু এরকমটা হলে হবে না--

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + \cdots .$$

যদি এই দুটো শর্ত পালিত হয় (মানে $a_n \to 0$ আর প্রতিটি group-এই সমান সংখ্যক term), তবে কোনো একটা grouped series-এর converge করা মানেই ungrouped series-টাও ওই একই limit-এ converge করবে। কেন সেটা নীচের উদাহরণটা দেখলেই বুঝবে।

Example 10: Let the grouped series

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + \cdots$$

converge to 5. If $a_n \to 0$, then show that the ungrouped series

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

must also converge to 5.

SOLUTION: ধরো ungrouped series-টার partial sum-গুলোকে S_n, আর grouped series-টার partial sum-দের T_n নাম দিলাম--

Let

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ T_n &= \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n})}_{n \text{ groups}}. \end{aligned}$$

Given $T_k \to 5$.

Now $T_k = S_{3k}$.

$\therefore S_{3k} \to 5$.

এবার দেখাব যে $S_n \to 5$ হবে। যদি n সংখ্যাটা 3 দিয়ে divisible হয় (ভাগ যায়), তবে $n = 3k$ লিখতে পারি, সুতরাং সেক্ষেত্রে $S_n \equiv S_{3k} \to 5$. কিন্তু সব n-ই তো আর 3 দিয়ে divisible নয়। তাদেরকে হয় $3k+1$ নয় $3k+2$ আকারে লেখা যায়। লক্ষ কর যে $S_{3k+1} = S_{3k} + a_{3k+1}$. এর মধ্যে $S_{3k} \to 5$ তো জানিই, আর যেহেতু $a_n \to 0$ দিয়েছে, তাই $a_{3k+1} \to 0$. সুতরাং--

Hence

$$\begin{aligned} S_{3k+1} &= S_{3k} + a_{3k+1} &&\to 5 + 0 = 5, \\ S_{3k+2} &= S_{3n} + a_{3k+1} + a_{3k+2} &&\to 5 + 0 + 0 = 5. \end{aligned}$$

Since every integer n is of the form $3k$ or $3k+1$ or $3k+2$,

hence $S_n \to 5$, as required.

■

একইভাবে নীচের অংকটা কর।

Exercise 38: Let the grouped series

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots$$

converge to $\ell \in \mathbb{R}$. If $a_n \to 0$, then show that the ungrouped series

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

must also converge to ℓ. ■

Exercise 39: Let the grouped series

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots$$

diverge to ∞. If $a_n \to 0$, then must the ungrouped series

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

also diverge to ∞? ■

DAY 27
Series with arbitrary terms (part 5)

27.1 Rearrangement

আমরা জানি যে addition হল commutative, যেমন $2+3+4$ মানেও যা, $3+4+2$ মানেও তা। অর্থাৎ সংখ্যাগুলোকে অন্যভাবে সাজালে (ইংরাজীতে যাকে বলে rearrange করা) যোগফলটা বদলায় না। দুঃখের বিষয়, এই চমৎকার গুণটা infinite series-দের বেলায় সর্বদা থাকে না! একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 11: এই infinite series-টা নাও--

$$1+1-1+1+1-1++-++-\cdots.$$

এখানে প্রতি দুটো $+1$-র জন্য মোটে একখানা করে -1. তাই partial sum-গুলো দুই পা করে ওঠে আর এক পা করে নামে (Fig 11). যেহেতু ওঠার পরিমাণ বেশী তাই infinite series-টা sum হবে ∞. এখানে মোট কতগুলো $+1$ আছে? উত্তর হল-- infinitely many. একইভাবে -1-ও আছে infinitely many. এদেরকে এবার একটু অন্যভাবে সাজানো যাক--

$$-1-1+1-1-1+1--+--+\cdots.$$

এবার sum কত হবে? এবার আমরা দুই পা করে নামছি, তার পর এক পা উঠছি (Fig 12). যেহেতু নামার পরিমাণটা বেশী তাই এবার sum হবে $-\infty$. দেখলে, একটু অন্যভাবে সাজানোতেই sum-টা কেমন বেমালুম বদলে গেল?
এবার আরও একভাবে সাজাই--

$$1-1+1-1+1-1+-+-+-\cdots.$$

এবার series-টার কোনো sum-ই নেই, কারণ এর partial sum-গুলো এখন একটা oscillating sequence-এ পরিণত হয়েছে! ■

এমনটা হবার কারণ কি? প্রথম series-টা দ্যাখো, এর partial sum-গুলো হল

$$S_1=1,\quad S_2=1+1=2,\quad S_3=1,\quad S_4=2,\ldots$$

যদি দ্বিতীয় series-টার partial sum নাও তবে পাবে

$$T_1=-1,\quad T_2=-1-1=-2,\quad T_3=-1,\quad T_4=-2,\ldots$$

লক্ষ কর এরা সম্পূর্ণ আলাদা। তাই এদের limit এক হলেই আশ্চর্য হত!

27.1.1 Rearrangement কাকে বলে?

এই প্রশ্নটা বোকা বোকা মনে হতে পারে। একটু আগেই তো আমরা বললাম যে rearrangement মানে নতুন করে সাজানো, হয়তো আগের জিনিসকে পরে, পরের জিনিসকে আগে করে। যেমন $1+1+9$-কে rearrange করে লিখতে পারি $1+9+1$.

Fig 11

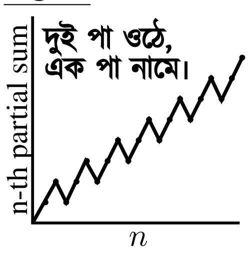


Fig 12

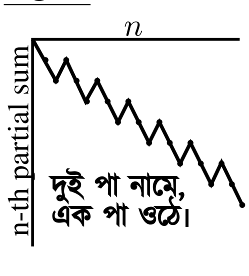
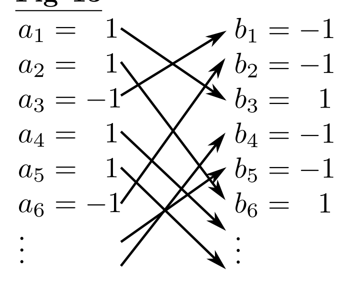


Fig 13



লক্ষণীয় যে ক্রমপরিবর্তন করা ছাড়া আর কিছু বদলানোর অধিকার কিন্তু আমাদের নেই, যেমন দুটোর জায়গায় তিনটে 1 এনে ফেলতে পারি না। এই ব্যাপারটা finite-সংখ্যক জিনিসের ক্ষেত্রে বোঝা কঠিন নয়, কিন্তু infinite series-এর বেলায় কিঞ্চিৎ ঝামেলাজনক, কারণ লেখার সময়ে আমরা অনেকসময়েই খালি প্রথম কয়েকটা term লিখে বাকীগুলোকে ডট্ডটের পিছনে চালান করে দিই। Rearrange করার সময়ে প্রায়শঃই ডট্ডটের ভিতর থেকে term বার করে আনতে হয়, এবং সেটা করতে গিয়ে মাথা গুলিয়ে যায়। যেমন ধরো যে দুটো series নিয়ে এক্ষুণি কাজ করলাম--

$$1+1-1+1+1-1++-++-\cdots$$

আর

$$-1-1+1-1-1+1--+--+\cdots.$$

হঠাৎ দেখলে পরে কিন্তু মোটেই মনে হয় না যে, ওরা পরস্পরের rearrangement মাত্র। প্রথমটা দেখে মনে হয় যেন $+1$ বেশী আছে -1-এর চেয়ে। অপরপক্ষে দ্বিতীয়টাতে দেখে বোধ হয় যেন -1 আছে বেশী $+1$-এর চেয়ে। তাহলে একটা কি করে আরেকটার rearrangement হতে পারে? আসলে কিন্তু এটা দৃষ্টিবিভ্রম, ওই ডট্ডট্গুলোর কারসাজি। দুটো series-এই আসলে সমান সংখ্যক (infinite-সংখ্যক) $+1$ আর -1 আছে। Infinitely many জিনিসের set-এর সাইজের তুলনা করার কায়দা হল bijection ব্যবহার করা। Fig 13-এ আমরা দুটো series-এর মধ্যে একটা bijection দেখিয়েছি। এখানে

$$b_1 = a_3, \quad b_2 = a_6, \quad b_3 = a_1, \ldots$$

তার মানে এখানে bijection-টাকে যদি f নাম দিই তবে লিখতে পারি

$$b_1 = a_{f(1)}, \quad b_2 = a_{f(2)}, \quad b_3 = a_{f(3)}, \ldots$$

যেখানে

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 6, \quad f(3) = 1, \ldots$$

এইখান থেকেই আমরা অংকের ভাষায় rearrangement-এর definition লিখতে পারি এইভাবে--

DEFINITION: Rearrangement

Let $\sum a_n$ be any infinite series. Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be any bijection. Then $\sum a_{f(n)}$ is a called a <u>rearrangement</u> of $\sum a_n$.

Example 12: ধরো alternating harmonic series-টা আবার নিলাম--

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + - + - \cdots.$$

যদি সব positive term-গুলোকে প্রথমে নিয়ে আসি, আর সব negative term-গুলোকে শেষে নিয়ে যাই তবে কি সেটা একটা rearrangement হবে?

SOLUTION: না, এরকম করলে কোনো bijection পাব না। যেহেতু positive term আছে infinitely many, তাই প্রথমে ওদের সবাইকে আনতে গেলে, সেই আনা আর কোনো দিনই ফুরোবে না, তাই negative term-গুলো আর আসবেই না! ■

কোনো infinite series-কে rearrange করলে তার sum-এর কি পরিবর্তন হয়, সে বিষয়ে নানা গবেষণা হয়েছে। এবার সেই গল্পে আসি। গল্পটার দুটো প্রধান অংশ-- conditionally convergent series -দের rearrange করলে কি হয়, আর absolutely convergent series-এর rearrange করলেই বা কি হয়।

27.1.2 Conditionally convergent

একটা series $\sum a_n$ যদি conditionally convergent হয় (মানে $\sum a_n$ converge করে, কিন্তু $\sum |a_n| = \infty$ হয়), তবে তাকে rearrange করলে কি হবে সে বিষয়ে একটা অদ্ভুত theorem আছে--Riemann's rearrangement theorem. এর বক্তব্য এইরকম-- যদি তোমাকে যে কোনো একটা সংখ্যা ℓ দিই, তবে তুমি এমনভাবে a_n-গুলোকে rearrange করতে পারবে, যাতে rearranged series-টা গিয়ে সেই ℓ-এই converge করবে! যেমন যদি sum-টাকে তুমি 10000 বানাতে চাও, তাও সম্ভব, আবার যদি -10000 বানাতে চাও, খানিকটা অন্যভাবে সাজালে সেটাও সম্ভব! শুধু তাই নয়, এমনভাবেও সাজাতে পারো যাতে sum-টা ∞ হয়, বা $-\infty$ হয়। যদি তাতেও মন না ওঠে তবে আরও আছে--তুমি series-টাকে এমনভাবে rearrange করতে পারো যাতে আদৌ কোনো sum-ই না থাকে, মানে series-টা oscillate করে!

Exercise 40: State Riemann's rearrangement theorem.[2] ■

HINT:

> **Riemann's rearrangement theorem**
>
> Let $\sum a_n$ be any conditionally convergent series. Let $\ell \in \mathbb{R}$ be any number. Then there is a bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that
>
> $$\sum_n a_{f(n)} = \ell.$$
>
> Also, there are bijections $g, h, i, k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that
>
> - $\sum_n a_{g(n)} = \infty$
> - $\sum_n a_{h(n)} = -\infty$
> - $\sum_n a_{i(n)}$ oscillates finitely
> - $\sum_n a_{k(n)}$ oscillates infinitely.

এখানে "oscillates finitely" মানে partial sum-এর sequence-টা oscillating এবং bounded. যদি oscillating এবং unbounded হয় তবে তাকে বলেছি "oscillates infinitely."

এই theorem-টা প্রমাণ করা খুব কঠিন কিছু নয়, যদিও আমরা এখানে প্রমাণটা করব না, খালি মূল ধারণাটা দেব। এখানে মোক্ষম অস্ত্র হল সেই জিনিসটা যেটা আমরা আগের অধ্যায়ে শিখেছিলাম--যদি $\sum a_n$ conditionally convergent হয় তবে

$$\sum a_n^+ = \sum a_n^- = \infty.$$

তার মানে a_n^+-গুলোকে যোগ করতে থাকলে যোগফলটাকে যত খুশী বড় বানানো যায়। একইভাবে a_n^--গুলোকে যোগ করে গেলেও একই কথা বলা যায়। আরেকটা কথাও কাজে লাগবে--যেহেতু $\sum a_n$ হল convergent, তাই $a_n \to 0$ হবে।

এবার মনে কর তোমাকে একটা যে কোনো সংখ্যা দিলাম, ধরো 1. তোমার কাজ হল a_n-গুলোকে এমনভাবে সাজানো যাতে rearranged series-টার sum ঠিক 1 হয়। এবার যেটা বলব সেটা বোঝার জন্য Fig 14 দ্যাখো। প্রথমে আমরা খালি positive term-গুলো যোগ করতে থাকব। যেহেতু $\sum a_n^+ = \infty$, এক সময়ে যোগফলটা 1-এর বেশী হবেই। যেই বেশী হবে, অমনি আমরা নীচে নামতে আরম্ভ করব, negative term-গুলো যোগ করে। যেহেতু $\sum a_n^- = \infty$, তাই এক সময়ে যোগফলটা 1-এর নীচে নামবেই। অমনি আবার positive term-গুলো যোগ করতে থাকো। তার মানে তুমি 1-এর ধারেকাছেই ঘুরঘুর্ করছ। 1-এর নীচে গেলেই positive term যোগ করে 1-এর উপরে ভুস্ করে ভেসে উঠছ, আর ভেসে উঠেই আবার

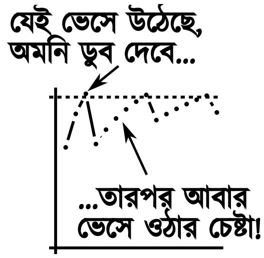


Fig 14

negative term ব্যবহার করে টুপ্ করে ডুব দিচ্ছ। এদিকে $a_n \to 0$. তাই এইরকম ক্রমাগত ওঠানামা করতে করতে তুমি ক্রমশঃই 1-র আরও আরও কাছে এগিয়ে যাচ্ছ। বলাই বাহুল্য যে, এখানে 1 না নিয়ে অন্য কিছু নিলেও একই যুক্তি খাটত। একটা sum দেওয়া থাকলে কি করে rearrange করে সেই sum-এ পৌঁছতে হয়, সেটা শিখলাম। এর উল্টো কাজটা বেশী কঠিন--একটা rearrangement দেওয়া থাকলে তার sum কি হবে (বা আদৌ sum থাকবে কি না) সেটা বোঝা। এবার সেরকম একটা উদাহরণ করে দেখি।
আমরা জানি যে alternating harmonic series (মানে $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$) হল conditionally convergent. এখানে আমরা এর একটা rearrangement-এর sum বার করব। এই অংকটা করবার জন্য একটা সহজ কথা মনে রাখা দরকার। সেটা হল এই যে যদি আমরা positive even number-গুলোর একটা তালিকা করি-- $2, 4, 6, 8, \ldots$ তবে এই তালিকায় n-th even number (জোড় সংখ্যা) হবে $2n$. একইভাবে যদি positive odd number-দের তালিকা নিই--$1, 3, 5, 7, \ldots$ তবে n-th odd number (বিজোড় সংখ্যা) হবে $2n-1$ (সাবধান, $2n+1$ নয় কিন্তু!)।

Exercise 41: Let S be the sum of the conditionally convergent series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots .$$

Show that the rearranged series

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converges to $3S/2$. Give reason for obtaining different sums.[4] ■

HINT:

আমরা আগেই দেখেছি ($\log(1+x)$-এর Maclaurin series ব্যবহার করে) যে alternating harmonic series-এর sum হয় $\log 2$. তার মানে এখানে $S = \log 2$.

> By Maclaurin series of $\log(1+x)$ at $x=1$, we know that $S = \log 2$.

এবার দেখাতে হবে যে rearranged series-টার sum হল $\frac{3S}{2}$, মানে $\frac{3\log 2}{2}$. তার জন্য আমাদের কাজ করতে হবে rearranged series-টার partial sum-গুলো নিয়ে।

> Let $b_n = n$-th term of the rearranged series, and let
>
> $$S_n = b_1 + \cdots + b_n.$$
>
> To show $S_n \to \frac{3}{2}\log 2$.

এবার লক্ষ কর যে আমাদের rearrangement-টার মধ্যে একটা প্যাটার্ণ আছে-- দুটো positive, একটা negative, এইভাবে এগোচ্ছে। তার মানে প্যাটার্ণটার দৈর্ঘ্য হল $2+1=3$. এই প্যাটার্ণটাকে কাজে লাগানোর জন্য rearranged series-টার term-গুলোকে তিনটে তিনটে করে গ্রুপ করে নিলে সুবিধা হবে। আমাদের কাজ হল $S_n \to \frac{3\log 2}{2}$ দেখানো। আমি দাবী করছি যে, $S_{3n} \to \frac{3\log 2}{2}$ দেখালেই চলবে।

Enough to show $S_{3n} \to \frac{3\log 2}{2}$,

কেন? কারণ এখানে general term যাচ্ছে 0-র দিকে, মানে $b_n \to 0$. তাই একবার $S_{3n} \to \frac{3\log 2}{2}$ দেখাতে পারলে--

⟦ Because:

If $S_{3n} \to \frac{3\log 2}{2}$ then

$$\begin{aligned} S_{3n+1} &= S_{3n} + b_{3n+1} \to \tfrac{3\log 2}{2} + 0 = \tfrac{3\log 2}{2} \\ S_{3n+2} &= S_{3n} + b_{3n+1} + b_{3n+2} \to \tfrac{3\log 2}{2} + 0 + 0 = \tfrac{3\log 2}{2}. \end{aligned}$$

⟧

যেহেতু যে কোনো natural number-ই হয় $3n$ বা $3n+1$ বা $3n+2$ আকারের, তাই এথেকেই সিদ্ধান্ত করতে পারব যে $S_n \to \frac{3}{2}\log 2$.

এর জন্য আমাদের প্রধান হাতিয়ার হবে harmonic series. আমরা জানি যে harmonic series-এর partial sum-গুলো $\log n$-এর মত আচরণ করে। সেই কথাটা এখানে কাজে লাগবে।

Let

$$H_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

We know that

$$H_n - \log n \to \gamma.$$

Now

$$S_{3n} = \underbrace{\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{4n-1}}_{\text{First } 2n \text{ odd terms}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)}_{\text{First } n \text{ even terms}}$$

এটা কি করে পেলাম বুঝলে? আমরা দুটো odd একটা even এই প্যাটার্ণে এগোচ্ছিলাম। তাই $3n$-খানা term-এর মধ্যে $2n$-টা odd আর n-টা even term থাকবে। প্রথম $2n$-টা odd term হল $1, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{4n-1}$. আর প্রথম n-টা even term হল $\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2n}$.

এবার এইগুলোকে H_n দিয়ে প্রকাশ করব। Even-গুলোকে নিয়ে মুশকিল নেই--

$$= \underbrace{\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{4n-1}}_{\text{First } 2n \text{ odd terms}} - \frac{1}{2}H_n$$

Odd অংশটায় আমরা মাঝের even term-গুলো যোগ আর বিয়োগ করে নেব--

$$
\begin{aligned}
&= H_{4n} - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{2}H_n \\
&= H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} - \frac{1}{2}H_n.
\end{aligned}
$$

এরপরে কাজ হল প্রত্যেকটা H_n-জাতীয় জিনিসকে $\log n$-জাতীয় জিনিসে পরিণত করা। তার জন্য $\log n$-জাতীয় জিনিসগুলো যোগ আর বিয়োগ করব--

Now

$$
\begin{aligned}
& H_{4n} - \tfrac{1}{2}H_{2n} - \tfrac{1}{2}H_n \\
= \;& (H_{4n} - \log 4n) - \tfrac{1}{2}(H_{2n} - \log 2n) - \tfrac{1}{2}(H_n - \log n) \\
& \quad + \log 4n - \tfrac{1}{2}\log 2n - \tfrac{1}{2}\log n \\
= \;& (H_{4n} - \log 4n) - \tfrac{1}{2}(H_{2n} - \log 2n) - \tfrac{1}{2}(H_n - \log n) \\
& \quad + \log \frac{4n}{\sqrt{2n \times n}}
\end{aligned}
$$

এইবার limit নেব। মনে রেখো যে $H_n - \log n$-জাতীয় জিনিসগুলো সবাই γ-র দিকে যাবে।

$$
\begin{aligned}
&\to \gamma - \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma + \log \frac{4}{\sqrt{2}} \\
&= \log(2\sqrt{2}) = \tfrac{3}{2}\log 2.
\end{aligned}
$$

So $S_{3n} \to \frac{3}{2}\log 2$.

$\therefore$ By earlier argument, $S_n \to \frac{3}{2}\log 2$, as required.

এই অংকটাতে প্যাটার্ণটা ছিল $++-$ (মানে প্রতি গ্রুপে দুটো করে positive আর একটা করে negative term ছিল)। এই জাতীয় অন্য কোনো প্যাটার্ণ থাকলেও অংকটা একইভাবে করা যেত। যেমন ধর নীচের অংকটায় প্যাটার্ণটা হল $+++-$.

Example 13: Find the limit of the series

$$
1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} +++-+++-\cdots.
$$

SOLUTION: এখানে

$$
S_{4n} = \underbrace{\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{6n-1}}_{\text{First } 3n \text{ odd terms}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)}_{\text{First } n \text{ even terms}}
$$

এবার আগের অংকের অনুসরণে এগোও দেখি। ■

আরেকটা একইরকমের অংক, এখানে প্যাটার্ণটা হল $++--$.

Exercise 42: Find the limit of the series

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}++--\cdots.$$

■

Exercise 43: যদি প্যাটার্ণটা হত এইরকম--

$$\underbrace{+\cdots+}_{p\text{ times}}\underbrace{-\cdots-}_{q\text{ times}}$$

তবে দেখাও যে rearranged series-টার sum হত $\log\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$. ■

27.1.3 Absolutely convergent

আমরা দেখেছি যে একটা series-এর term-গুলোকে rearrange করলে তার partial sum-গুলো সম্পূর্ণ বদলে যায়। ফলে rearrange করার আগের limit আর পরের limit-এর খুব কিছু সম্পর্ক প্রত্যাশা করা কঠিন। কিন্তু আশ্চর্য ব্যাপার এই যে, যদি গোড়ার series-টা absolutely convergent হয়, তবে হাজার rearrange করলেও সেটা absolutely convergent-ই থাকে। শুধু তাই নয়, rearrange করাতে sum-টাও মোটেই বদলায় না!

আমরা এই কথাটা দুই ধাপে প্রমাণ করব। প্রথম ধাপে খালি positive term-ওয়ালা series নিয়ে কাজ করব।

> **THEOREM**
>
> If $\sum a_n$ is a series of positive terms then rearrangement cannot change its limit (finite/infinite).

Proof:

Let $\sum a_{f(n)}$ be any rearrangement, where $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ is any bijection.

Let

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{f(k)}.$$

পুরো প্রমাণটাকে আমরা দুটো কেসে ভেঙে নেব-- $\sum a_n<\infty$ আর $\sum a_n=\infty$.

Case I: $\sum a_n<\infty$:

Let $\ell_1=\sum a_n$. Then $S_n\to\ell_1$.

আমরা দেখাব যে $\sum a_{f(n)}$-ও convergent হবে, এবং শুধু তাই নয় $\sum a_{f(n)}\le\ell_1$ হবে। এর জন্য একটা ছোট্টো কৌশল করব--

First we shall show

Target $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad T_n \leq S_N.$

এর মানেটা বুঝে নিই। ধরো যে কোনো একটা T_n নিলে, যেমন T_3. এবার পর পর $S_1, S_2, ...$ ইত্যাদি দেখতে থাকো, এক সময়ে না এক সময়ে এমন একটা S_N পাবে যেটা T_3-কে ছাড়িয়ে যাবে। এটা কেন হবে সেটা বোঝা সহজ। ধরো আমাদের rearrangement-টা হল এইরকম--

$$a_4 + a_5 + a_1 + a_{10} + a_2 + \cdots$$

তাহলে

$$T_3 = a_4 + a_5 + a_1 \leq a_1 + \cdots + a_5 = S_5.$$

এখানে আমরা S_5 নিলাম কারণ T_3-র মধ্যে সবচেয়ে বেশী n-ওয়ালা যে a_n আছে সেটা হল a_5. এই যুক্তিটাই এবার আমরা গুছিয়ে লিখব।

$\forall n$ Take any $n \in \mathbb{N}$.

$\exists N$ Choose $N = \max\{f(1), ..., f(n)\}$.

Then

$$\begin{aligned} T_n &= a_{f(1)} + a_{f(2)} + \cdots + a_{f(n)} \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ &= S_N. \end{aligned}$$

এইবার আমরা সেই কথাটা লাগাব--nondecreasing sequence-রা bounded হলে convergent হয়। (আর convergent sequence-রা তো সব সময়েই bounded হয়।)

Now $\{S_n\}_n$ is a convergent sequence, and so a bounded sequence.

So $\{T_n\}_n$ is also a bounded sequence.

Also $\{T_n\}_n$ is a nondecreasing sequence.

So $\{T_n\}_n$ must converge, to ℓ_2, say.

Now $T_k \leq S_{n_k}$. So taking limit as $k \to \infty$, we have $\ell_2 \leq \ell_1$.

Thus rearranged series has limit less than or equal to the original limit.

এবার লক্ষ কর যে, rearrangement একটা দুমুখো ব্যাপার--$\sum a_{f(n)}$-কে যেমন $\sum a_n$-এর rearrangement বলা যায়, তেমনি আবার $\sum a_n$-কে বলা যায় $\sum a_{f(n)}$-এর rearrangement, কারণ একটা bijection-এর inverse-ও হল bijection. তা থেকে আমরা বলতে পারি যে $\sum a_n$-এর sum হবে $\sum a_{f(n)}$-এর sum-এর সমান বা কম, মানে $\ell_1 \leq \ell_2$.

Now, $\sum a_n$ is a rearranged version of $\sum a_{f(n)}$, and so $\ell_1 \leq \ell_2$.

So we have $\ell_1 = \ell_2$, as required.

বাকী রইল খালি $\sum a_n = \infty$ কেসটা। সেটাতে আর নতুন করে খুব কিছু করার নেই।

> <u>Case II: $\sum a_n = \infty$:</u>
>
> We know that $\sum a_{f(n)}$ is either $= \infty$ or convergent.
>
> Let, if possible, $\sum a_{f(n)}$ be convergent, to some $\ell \in \mathbb{R}$, say.
>
> Then, by case I, $\sum a_n = \ell (\Rightarrow\Leftarrow)$.

[Q.E.D]

এইবার আমরা absolutely convergent series নিয়ে কাজ করব, যেখানে term-গুলো positive/negative যা খুশী হতে পারে। এখানে আমরা $\sum a_n$-কে ভেঙে নেব এইভাবে--

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-.$$

এবার $\sum a_n^+$ আর $\sum a_n^-$ দুজনেই positive term-ওয়ালা convergent series. তাই এক্ষুণি যা যা করলাম সেগুলো ওদের বেলায় খাটবে। এবং তা থেকেই নীচের theorem-টা পাব--

> **THEOREM**
>
> If $\sum a_n$ is an absolutely convergent series, then rearrangement cannot change its sum.

Proof:

> Let
>
> $$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{if } a_n > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
>
> and
>
> $$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{if } a_n < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
>
> Since $\sum a_n$ is absolutely convergent, both $\sum a_n^+$ and $\sum a_n^-$ are also convergent.

এটা আমরা আগেই শিখেছিলাম।

> Also
>
> $$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-.$$
>
> Now $\sum a_{f(n)}^+$ is a rearrangement of $\sum a_n^+$ and hence by the result for series with nonnegative terms
>
> $$\sum a_{f(n)}^+ = \sum a_n^+.$$
>
> Similarly,
>
> $$\sum a_{f(n)}^- = \sum a_n^-.$$

So

$$\sum a_{f(n)} = \sum a^+_{f(n)} - \sum a^-_{f(n)}. = \sum a^+_n - \sum a^-_n = \sum a_n,$$

as required.

[Q.E.D]

Answers

17. না। **18.** হ্যাঁ, যেমন $a_n = n, \quad b_n = -n$. **19.** হ্যাঁ। **20.** না, হ্যাঁ। **25.** **(1)** $\frac{3}{2}$. **(2)** $\frac{2}{3}$. **(3)** $\frac{1}{2}$. **(4)** $-\frac{3}{4}$. **26.** **(1)** e^{-1}. **(2)** 2. **(3)** $\frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$. **(4)** $\frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$. **29.** $\frac{125}{32}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} = 0$. **31.** $\sin 1$. **32.** $H_5 - \log 5 \approx 0.6738954$. **35.** হ্যাঁ। **39.** Yes.
42. $\log 2$.

Chapter VI
Infinite series (part 3)

এই অধ্যায়ে আমরা যা আলোচনা করব সেগুলো একটু বেশী খটমট এবং বাস্তবক্ষেত্রে এদের প্রয়োগও কম। তাই যারা এই বইটা খালি অংক শেখার আনন্দে পড়ছ (পরীক্ষা পাশের জন্য নয়) তারা এই অধ্যায়টা খালি চোখ বুলিয়ে ছেড়ে দিতে পার।

DAY 28
Condensation test (positive terms)

আমরা চতুর্থ অধ্যায়ে দেখিয়েছিলাম যে

$$\sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} = \infty & \text{if } p \leq 1 \\ < \infty & \text{if } p > 1 \end{cases} .$$

তার প্রমাণের কায়দাটা মনে করে নিই। যেহেতু term-গুলো সব positive তাই partial sum-এর sequence-টা increasing. সেই কারণে পুরো sequence-টা convergent না দেখিয়ে খালি যে কোনো একটা subsequence-কে convergent দেখানোই যথেষ্ট ছিল। আমরা একটা অদ্ভুত subsequence নিয়ে কাজ করেছিলাম--

$$S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, ..., S_{2^n}, ...$$

মজা হল এখানে 2-এর power না নিয়ে 3-এর power নিলেও প্রমাণটা একইভাবে হত। শুধু তাই নয়, 2 বা 3-এর জায়গায় যে কোনো integer $\lambda > 1$-র power নিলেই কাজ চলত।
একই কায়দা অন্যান্য কিছু series-এর ক্ষেত্রেও খাটে, যাদের term-গুলো সবাই positive এবং decreasing to 0. এই test-টার নাম Cauchy's condensation test.

Exercise 1: State and prove Cauchy's condensation test.[1+4] ■

HINT:

Cauchy's condensation test

If $\{a_n\}_n$ is a non-increasing sequence of positive real numbers, and λ is a positive integer (> 1), then the two series

$$\sum_1^\infty a_n \text{ and } \sum_1^\infty \lambda^n a_{\lambda^n}$$

will either both converge or both diverge.

Proof:

প্রথমে দেখাব যে $\sum \lambda^n a_{\lambda^n} < \infty$ হলে $\sum a_n < \infty$ হয়।

Step 1: Let $\sum \lambda^n a_{\lambda^n} < \infty$.
Shall show $\sum a_n < \infty$.
Let
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ and } T_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k a_{\lambda^k}.$$

আমাদের দেখাতে হবে যে S_n-গুলো converge করে। যেহেতু $a_n > 0$ তাই $\{S_n\}_n$ একটা increasing sequence. সেই কারণে যে কোনো একটা subsequence-কে convergent দেখাতে পারলেই হবে।

Let $m_n = \lambda^n$. Then $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$
$\because a_n > 0 \therefore \{S_n\}_n$ is increasing.
$\therefore$ Enough to show that at least one subsequence converges.

এদিকে আমরা জানি যে increasing sequence-এর subsequence-রাও increasing-ই হয়। তাই এমন একটা subsequence দেখাতে পারলেই হবে যেটা bounded above. কারণ তাহলেই subsequence-টা converge করবে।

$\because$ all subsequences are also increasing,
$\therefore$ Enough to show a subsequence $\{S_{m_n}\}_n$ that is bounded above.

এইবার আমরা একটা অদ্ভুত কাজ করব--S_{m_n}-এর মধ্যে যে m_n-খানা term আছে তাদেরকে n-খানা গ্রুপে ভেঙে লিখব--

Now
$$\begin{aligned} S_{m_n} &= (a_1 + \cdots + a_{m_1}) \\ &\quad +(a_{m_1+1} + \cdots + a_{m_2}) \\ &\quad + \cdots + (a_{m_{n-1}+1} + \cdots + a_{m_n}) \end{aligned}$$

প্রথম গ্রুপে আছে m_1-টা term, দ্বিতীয় গ্রুপে $(m_2 - m_1)$-খানা, তৃতীয় গ্রুপে $(m_3 - m_2)$-খানা, এইরকম। প্রথম গ্রুপটা যেমন আছে থাক, আমরা তার পরের গ্রুপগুলোকে একটু মালিশ করব। লক্ষ কর যে a_n-রা যেহেতু nonincreasing, তাই দ্বিতীয় গ্রুপের সব term-ই প্রথম গ্রুপের শেষ term-টার চেয়ে (মানে a_{m_1}-এর চেয়ে) ছোটো। একইভাবে তৃতীয় গ্রুপের সবাই ছোটো দ্বিতীয় গ্রুপের শেষ term-টার চেয়ে। এইভাবে চলতে চলতে--

$$
\begin{aligned}
&\le (a_1+\cdots+a_{m_1}) \\
&\quad +\underbrace{(a_{m_1}+\cdots+a_{m_1})}_{(m_2-m_1)\ \text{times}} \\
&\quad +\cdots+\underbrace{(a_{m_{n-1}}+\cdots+a_{m_{n-1}})}_{(m_n-m_{n-1})\ \text{times}} \\
&= (a_1+\cdots+a_{m_1}) \\
&\quad +(m_2-m_1)a_{m_1}+\cdots+(m_n-m_{n-1})a_{m_{n-1}} \\
&= (a_1+\cdots+a_{m_1})+(\lambda-1)\big(\lambda a_\lambda+\cdots+\lambda^{n-1}a_{\lambda^{n-1}}\big) \\
&= (a_1+\cdots+a_{m_1})+(\lambda-1)T_{n-1}
\end{aligned}
$$

সব মিলিয়ে হল--

$$S_{m_n} \le (a_1+\cdots+a_{m_1})+(\lambda-1)T_{n-1} \qquad (*)$$

Now $\because \sum \lambda^n a_{\lambda^n} < \infty$,

$\therefore \{T_n\}_n$ is convergent.

$\therefore \{T_n\}_n$ is bounded, so bounded above.

$\therefore$ By (*) $\{S_{m_n}\}_n$ is bounded above.

$\because \{S_n\}_n$ is increasing,

$\therefore \lim_n S_n < \infty$, or $\sum a_n < \infty$, as required.

এইবার দ্বিতীয় অংশ। এখানে দেখাব যে $\sum \lambda^n a_{\lambda^n} = \infty$ হলে $\sum a_n = \infty$ হয়। মূল কায়দাটা এখানেও প্রথম অংশেরই মত, যেকোনো একটা subsequence-কে divergent দেখাতে পারলেই হবে।

Step 2: Let $\sum \lambda^n a_{\lambda^n} = \infty$.

Shall show $S_n \to \infty$.

$\because \{S_n\}_n$ is increasing,

$\therefore$ Enough to show $S_{m_n} \to \infty$.

এখানেও S_{m_n}-কে একইভাবে গ্রুপে গ্রুপে ভেঙে লিখব--

$$\begin{aligned} S_{m_n} &= (a_1 + \cdots + a_{m_1}) \\ &\quad +(a_{m_1+1} + \cdots + a_{m_2}) \\ &\quad + \cdots + (a_{m_{n-1}+1} + \cdots + a_{m_n}) \\ &\geq \underbrace{(a_{m_1} + \cdots + a_{m_1})}_{m_1 \text{ times}} \\ &\quad + \underbrace{(a_{m_2} + \cdots + a_{m_2})}_{(m_2-m_1) \text{ times}} \\ &\quad + \cdots + \underbrace{(a_{m_n} + \cdots + a_{m_n})}_{(m_n-m_{n-1}) \text{ times}}. \end{aligned}$$

এটা কি করে হল? এখানে প্রতিটি গ্রুপের সবগুলো term-ই গ্রুপের শেষ term-টার চেয়ে বড় বা সমান, কারণ a_n-গুলো non-increasing বলা আছে।

$$\begin{aligned} &= m_1 a_{m_1} + (m_2 - m_1) a_{m_2} + \cdots + (m_n - m_{n-1}) a_{m_n} \\ &= \lambda a_\lambda + \sum_{k=2}^{n} (\lambda^k - \lambda^{k-1}) a_{\lambda^k} \\ &= \lambda a_\lambda + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \tfrac{1}{\lambda}\right) \lambda^k a_{\lambda^k} \end{aligned}$$

বাঃ, এই তো বেশ $\sum \lambda^n a_{\lambda^n}$-গোছের একটা জিনিস পাওয়া যাচ্ছে। খালি সমস্যা হল শুরুটা হচ্ছে 2 থেকে। কিন্তু সেটা কোনো বড় সমস্যা নয়। বাইরে যে λa_λ-টা আছে ওটাকে একটু মালিশ করে ভিতরে চালান করে দিলেই পাবে--

$$\begin{aligned} &= a_\lambda + \left(1 - \tfrac{1}{\lambda}\right) \sum_{k=1}^{n} \lambda^k a_{\lambda^k} \\ &= a_\lambda + T_n \to \infty. \end{aligned}$$

So $\sum a_n = \infty$, as required.

Exercise 2: If $\{f(n)\}_n$ is a monotone decreasing sequence of positive real numbers, and a is a positive integer (> 1), show that the two series $\sum_1^\infty f(n)$ and $\sum_1^\infty a^n f(a^n)$ will converge or diverge together.[4] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

Exercise 3: If $\{a_n\}_n$ is a nonincreasing sequence of positive numbers, show that $\sum a_n$ converges if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

converges.[4] ■

HINT:
আগের অংকটাই।

28.1 Application

Condensation test-এর একটা সমস্যা হল এখানে $\sum a_n$-এর convergence বার করার জন্য $\sum \lambda^n a_{\lambda^n}$-এর convergence পরীক্ষা করে দেখার দরকার পড়ে। সাদা চোখে দেখে এই দ্বিতীয় series-টাকে $\sum a_n$-এর চেয়ে অনেক বেশী বিচ্ছিরি বলে মনে হয়। তাই condensation test কেবল সেই সব অল্পসংখ্যক ধরণের series-এর জন্যই কাজে দেয় যাদের বেলায় $\sum \lambda^n a_{\lambda^n}$-টা কাটাকুটি হয়ে গিয়ে $\sum a_n$-এর চেয়েও সহজ হয়ে পড়ে। সাধারণতঃ $a_n = \frac{1}{n^p}$ বা $a_n = \frac{1}{\log n}$ বা $a_n = \frac{1}{(\log n)^p}$ জাতীয় ক্ষেত্রেই condensation test-এর মূল প্রয়োগ।

এবার সেরকম কিছু উদাহরণ দেখি। আর হ্যাঁ, অধিকাংশ ক্ষেত্রেই condensation test-এ $\lambda = 2$ নিয়ে কাজ করলেই চলে।

Exercise 4: State Cauchy's condensation test for convergence of infinite series of positive terms and hence discuss the convergence of the series $\sum_n \frac{1}{n^p}$.[1+3] ■

HINT:
প্রথম অংশ তো এক্ষুণি করলাম। এবার দ্বিতীয় অংশটা দেখি। প্রথম কাজ হল দেখে নেওয়া যে condensation test এখানে সত্যিই খাটে কি না। মনে রেখো condensation test-এর দুটো শর্ত-- term-গুলোকে positive হতে হবে এবং decreasing হতে হবে। এই উদাহরণে দুটো শর্তই পালিত হয়েছে। সেই কথাটা আগে লিখে তবে condensation test-এ হাত দেব--

> Second part:
>
> The series has decreasing, positive terms.

এবার condensation test লাগাব, $\lambda = 2$ নিয়ে--

> By Cauchy's condensation test, our series behaves like
>
> $$\sum_n \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum_n \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_n (2^{1-p})^n,$$
>
> which is a geometric series with common ratio
>
> $$2^{1-p} \lesseqqgtr 1 \text{ according as } p \gtreqqless 1.$$
>
> So the given series converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.

Exercise 5: State Cauchy's condensation test for convergence or divergence of a series of positive terms. Show that

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.[2+3] ■

HINT:
এটাও আগের অংকেরই মত--

> <u>Second part:</u> The series has decreasing, positive terms. By Cauchy's condensation test with $\lambda = 2$, our series behaves like
>
> $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

আবার আগের অংকের series-টা এসে উপস্থিত। সুতরাং সেখানকার কায়দাটাই আবার করব--

> The new series again has decreasing, positive terms. By Cauchy's condensation test with $\lambda = 2$, this series behaves like
>
> $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}.$$
>
> This is a geometric series with common ratio
>
> $$2^{1-p} \lesseqqgtr 1 \text{ according as } p \gtreqqless 1.$$
>
> So the given series converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$, as required.

Exercise 6: Show that

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)}$$

is divergent.[3] ■

HINT:
এই series-টায় প্রচুর log-এর ছড়াছড়ি দেখে আন্দাজ করছি যে condensation test কাজে দেবে। কিন্তু অংকে সেকথা উল্লেখ করা নেই। তাই আমরা প্রথমে test-টা লিখে নিই--

> By condensation test, we know that for a series $\sum a_n$ with positive decreasing terms
>
> $$\sum a_n = \infty \iff \sum \lambda^n a_{\lambda^n} = \infty,$$
>
> where $\lambda > 1$ is any integer.

এবার অংকটা শুরু করি--

> Our series has decreasing, positive terms. By condensation test with $\lambda = 2$,

> it diverges iff the following series diverges:
>
> $$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2^n)(\log\log 2^n)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log 2\log(n\log 2)}$$
> $$= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n + \log\log 2)}.$$

আবার condensation test লাগানো যাবে--

> The series has again decreasing, positive terms. By condensation test with $\lambda = 2$, it diverges iff the following series diverges:
>
> $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log 2^n + \log\log 2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log 2 + \log\log 2}.$$

আরও একবার condensation test লাগানোর সুযোগ--

> Again by condensation test, this diverges iff the following series diverges:
>
> $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\log 2 + \log\log 2},$$
>
> which diverges, because general term $\to \frac{1}{\log 2} \neq 0$. Hence the original series diverges, as required.

Exercise 7: Examine the convergence of

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\log n}.$$

[3] ■

HINT:
সাবধান, এখানে যেন চোখকান বুঁজে condensation test লাগিয়ে বোসো না! এখানে term-গুলো মোটেই সবাই positive নয়! তাই এখানে convergence পরীক্ষা করার তিন রকম ফল হতে পারে-- absolute convergence, conditional convergence আর divergence. প্রথমে আমরা absolute convergence পরীক্ষা করি।

> The absolute series is
>
> $$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n\log n},$$
>
> which has positive, decreasing terms. By condensation test, it converges

iff

$$\sum_2^\infty \frac{2^n}{2^n \log 2^n} = \frac{1}{\log 2} \sum_2^\infty \frac{1}{n}$$

converges.

But $\sum \frac{1}{n} = \infty$. So the absolute series diverges.

তার মানে absolute convergence হিসেব থেকে বাদ গেল। তাই আমাদের series-টা হয় conditionally convergent, নয়তো divergent.

The original series is $\sum_3^\infty (-1)^{n+1} a_n$, where $a_n = \frac{1}{n \log n}$ decreases to 0.

So the series converges by Leibniz's test.

Thus, the series converges conditionally.

28.2 Abel's theorem

এবার একটা সহজ দেখতে theorem শিখে আজকের মত ইতি টানব। এর নাম হল Abel's theorem. এর সঙ্গে condensation test-এর একটা ছোট্টো মিল আছে--দুজনেই খালি decreasing (বা nonincreasing), positive term-ওয়ালা series-এর জন্য প্রযোজ্য।

Abel's theorem

Let $\sum_n a_n$ be series of positive and nonincreasing terms. If $\sum a_n < \infty$ then

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0.$$

নীচের অংকে এটার প্রমাণ চেয়েছে।

Exercise 8: If $\sum_n a_n$ is a convergent series of positive and nonincreasing terms, show that

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0.$$

[3] ■

HINT:

Theorem-টা দেখতে খুব জটিল কিছু নয়, কিন্তু প্রমাণটা খানিকটা প্যাঁচালো। এখানে $\{na_n\}_n$ একটা sequence, দেখাতে হবে যে এটা 0-তে converge করে।

To show $n\, a_n \to 0$, *i.e.*,

Target $\quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |n\, a_n| < \epsilon.$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \sum a_n$ is convergent,

$\therefore$ By Cauchy criterion,

$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq K \quad |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose $N = 2K$.

$\forall n$ Take any $n \geq N$.

এবার অংকটাকে দুটো কেসে ভেঙে নেব, n even কিংবা odd, তার উপর নির্ভর করে। প্রথমে even অংশটা করব, তারপর সেটাকেই একটু এদিক-ওদিক করলেই odd অংশটাও হয়ে যাবে।

If n is even, let $n = 2k$, where $k \geq K$.

Then

$$\begin{aligned} |k\, a_{2k}| &= k\, a_{2k} \quad [\because a_{2k} \geq 0] \\ &\leq a_{k+1} + \cdots + a_{2k} \quad [\because a_k\text{'s nonincreasing}] \\ &= |a_{k+1} + \cdots + a_{2k}| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

So $|2k\, a_{2k}| < \epsilon$, or $|n\, a_n| < \epsilon$, as required.

যদি n-টা odd (বিজোড়) হয়, তবেও ব্যাপারটা একইরকম, সেক্ষেত্রে $n = 2k - 1$ নেব। দেখাতে হবে $|na_n| < \epsilon$, মানে $|(2k-1)a_{2k-1}| < \epsilon$. আমরা আবার একই প্যাঁচ খাটাতে চাই Cauchy property কাজে লাগিয়ে। তাই দেখাব যে, $|2k\, a_{2k-1}| < \epsilon$, (এটা দেখালেই চলবে কারণ $(2k-1)\, a_{2k-1} \leq 2k\, a_{2k-1}$). এবং সেটা দেখানো মানে $|k\, a_{2k-1}| < \frac{\epsilon}{2}$ দেখানো।

Again if n is odd, let $n = 2k - 1$, where $k \geq K$.

Now

$$\begin{aligned} |k\, a_{2k-1}| &\leq a_k + \cdots + a_{2k-1} \quad [\ a_i\text{'s nonincreasing}] \\ &= |a_k + \cdots + a_{2k-1}| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} (2k-1)a_{2k-1} &\leq 2k\, a_{2k-1} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

or $|n\, a_n| < \epsilon$, as required.

DAY 29
Ratio test-এর দাদারা (positive terms)

এখনও পর্যন্ত positive term-ওয়ালা series-এর জন্য যতগুলো test শিখেছি, তার মধ্যে সবচেয়ে কাজের হল comparison test আর ratio test. এদের দুজনের মধ্যে comparison test লাগানোর জন্য একটা যুৎসই series জানা থাকতে হয় যার সাথে comparison করা হবে। কিন্তু ratio test-এর ক্ষেত্রে সে ঝামেলাও নেই, পর পর দুটো term নাও, তাদের ratio বার কর, তারপর তাদের limit (বা limit না থাকলে, $\liminf$ বা $\limsup$) বার করে 1-এর সঙ্গে তুলনা কর। এই অব্ধি ভালোই, কিন্তু সমস্যা হয় যদি limit-টা 1-এর সমান হয়ে যায়। সেক্ষেত্রে ratio test কিছু বলতে পারে না। এরকম ক্ষেত্রে কি করা যায়, তা নিয়ে পণ্ডিতেরা বিস্তর গবেষণা করেছেন। দেখা গেছে যে, এরকম series-এর বেলায় তার convergence বা divergence নির্ভর করে

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$$

ঠিক কি ভাবে শূন্যর দিকে যাচ্ছে তার উপর। এই গবেষণার ফলে ratio test-এর চেয়ে শক্তিশালী কিছু test আবিষ্কৃত হয়েছে, যাদের মধ্যে তিনটের আলোচনা আজকে করব-- Raabe's test, Gauss's test আর Bertrand's test এই তিনজনেই Kummer's test নামের একটা আরও বেশী শক্তিশালী test-এর special case. সেই test-টা আমরা কালকে শিখব। আজকে আমরা কোনো প্রমাণের জটিলতার মধ্যে যাব না, খালি কিছু উদাহরণের মাধ্যমে আলোচনা করব। প্রমাণ-ট্রমাণ সব কালকে হবে।

29.1 Sequence-এর চরিত্রবিশ্লেষণ

ধরো তোমাকে এই কয়টা sequence দিলাম--

$$\left\{\tfrac{1}{n}\right\}_n, \quad \left\{\tfrac{1}{2^n}\right\}_n, \text{ আর } \left\{\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_n.$$

যদি $n \to \infty$ নাও, তবে এদের limit কি কি হবে? সব ক্ষেত্রেই limit-টা 0 হবে। তার মানে খালি limit দেখলে এরা সবাই একইরকম। এবার একটু কড়া পরীক্ষা করি। এদের প্রত্যেককে n দিয়ে গুণ করে তারপরে limit নিই। এবার কিন্তু আলাদা আলাদা limit পাব--

$$n \times \tfrac{1}{n} = 1 \to 1, \quad n \times \tfrac{1}{2^n} \to 0, \quad n \times \tfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty.$$

কোনো sequence-এর limit যদি 0 হয় তবে তার চরিত্রবিশ্লেষণের জন্য একটা কায়দা হল limit-টা নেওয়ার আগে n দিয়ে গুণ করে নেওয়া। এইবার আমরা দেখব এই কায়দাটাই বার বার লাগিয়ে কি করে Raabe's test আর Gauss's test পাওয়া যায়।

29.2 Raabe's test

এবার ধরো একটা positive term-ওয়ালা series $\sum a_n$ দিয়ে সেটা converge করে কি না দেখতে বলেছে। তুমি ratio test লাগিয়ে ধরো পেলে

$$\tfrac{a_n}{a_{n+1}} \to 1, \text{ বা, ঘুরিয়ে বললে, } \tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \to 0.$$

আমরা জানি যে, এই ক্ষেত্রে ratio test দিয়ে আর সুবিধা হবে না। এমতাবস্থায় আমরা ব্যাপারটাকে আরও খুঁটিয়ে দেখার জন্য $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$-কে প্রথমে n দিয়ে গুণ করে, তার পরে limit নিয়ে দেখতে পারি, যদি সেই limit-টা থেকে আরও সূক্ষ্ম কোনো তথ্য পাওয়া যায়--

$$\lim_n n\left(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Raabe's test ঠিক এই কাজটাই করে। যদি এই নতুন limit-টা > 1 হয় তবে প্রমাণ করা যায় যে $\sum a_n < \infty$, আর যদি < 1 হয় তবে $\sum a_n = \infty$. আর যদি limit-টা ঠিক 1 হয়ে যায়? তবে Raabe's test-ও inconclusive হয়ে যাবে। তখন আমাদের আরও সূক্ষ্ম কোনো test খুঁজতে হবে।

Raabe's test

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series of positive real numbers. If

$$\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1,$$

then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, and if

$$\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1,$$

then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

এবার এর কিছু প্রয়োগ দেখি।

Exercise 9: Test the convergence of the series

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}+\cdots.$$

[3] ■

HINT:
এখানে অবশ্য কোথাও বলে দেয় নি যে Raabe's test-ই লাগাতে হবে। যেহেতু term-গুলো সবাই positive তাই আমাদের প্রথম চেষ্টা হবে ratio test লাগানো--

The general term is

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}.$$

So

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}\times\frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2(2n+3)}{(2n+2)!}\\ &= \frac{1}{(2n+1)}\times\frac{(2(n+1))^2(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

চট্ করে দেখেই নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে ratio-টার limit হল 1. যদি এইকথাটা স্পষ্ট না হয়, তবে উপরনীচ দুদিককেই n^2 দিয়ে ভাগ করে limit নিয়ে দ্যাখো 1 পাও কি না।
Ratio test যখন ফেল মেরে গেল, তখন Raabe's test দিয়ে চেষ্টা করে দেখি--

> So
>
> $$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)\\ &= n\left(\frac{(4n^2+10n+6)-(4n^2+4n+1)}{4n^2+4n+1}\right)\\ &= \frac{n(6n+5)}{4n^2+4n+1}\\ &\to \frac{6}{4}=\frac{3}{2}>1. \end{aligned}$$
>
> So by Raabe's test the series converges.

নানা রকম test শিখে মাথার মধ্যে এমন গোল বেঁধে যায় যে, অনেক ছাত্রই গোড়ার সহজ কথাগুলো ভুলে প্রথমেই কঠিন কঠিন test করতে শুরু করে। নীচের অংকটা সেই বদভ্যাস দূর করার পক্ষে খুব ভালো। এখানে সহজ আর কঠিন দুরকম test-ই লাগবে।

Exercise 10: For arbitrary real numbers α and β, test the convergence of the following series.

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1+\alpha}{1+\beta}+\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)}+\cdots,\ \ (\alpha>0,\beta>0).$$

[3] ■

HINT:
প্রথমে সহজ কথাটা সেরে নিই--

> Clearly, the general term goes to ∞ if $\alpha>\beta$. Also, all the terms are 1 if $\alpha=\beta$.
> So the series diverges if $\alpha\geq\beta$.

এবার জটিল অংশটা--

> Let $\alpha<\beta$.
> If the n-th term is u_n, then
>
> $$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n+\beta}{n+\alpha}.$$

Limit নিলে 1 হয়ে যাচ্ছে, তাই ratio test-এর সোজা আঙুলে ঘি উঠবে না। Raabe's test-এর বাঁকা আঙুল লাগাই--

> So
>
> $$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{n(\beta-\alpha)}{n+\alpha}\to\beta-\alpha.$$
>
> So by Raabe's test the series diverges if $\beta-\alpha<1$, and converges if $\beta-\alpha>1$.

So we have convergence if $\alpha > \beta - 1$ and divergence if $\alpha < \beta - 1$.

If $\alpha = \beta - 1$, then

$$u_n = \frac{\beta}{n - 1 + \beta}.$$

$\because \frac{u_n}{1/n} \to 1 > 0$, and $\sum \frac{1}{n} = \infty$,

$\therefore$ By comparison test, $\sum u_n = \infty$ in this case.

নীচের অংকটা তোমার হাত পাকানোর জন্য।

Exercise 11: Let $\sum a_n$ be a series of positive terms. Let

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + b_n,$$

where $nb_n \to 0$. Then show that

- $\sum a_n < \infty$ if $a > 1$,
- $\sum a_n = \infty$ if $a < 1$.

■

29.3 Gauss' test

এবার মনে কর এমন একটা series $\sum a_n$ দিলাম ($a_n > 0$) যেখানে ratio test আর Raabe's test দুটোই ব্যর্থকাম হয়েছে। মানে

$$\lim_n \left(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 0 \text{ এবং } \lim_n n\left(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1.$$

তখন কি করবে? একটা কায়দা হল আবার n-দিয়ে গুণ করে limit নেওয়া--

$$\lim_n n\left[n\left(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right].$$

তাতেও কাজ না হলে n^2 কি n^3 কি আরও বড় কোনো power দিয়ে গুণ করার চেষ্টাও করা যেতে পারে। ঠিক এই জাতীয় চেষ্টার ফলেই জন্ম নিয়েছে Gauss's test. এখানে আমরা n দিয়ে গুণ না করে n^q দিয়ে গুণ করি যেখানে $q > 0$. তাহলে পেলাম

$$n^q\left[n\left(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]. \qquad (*)$$

এবার এর limit নেবারও দরকার নেই, খালি এই sequence-টা bounded হলেই জোর দিয়ে বলা যায় যে $\sum a_n = \infty$ হবেই! এই জোরটা কোথা থেকে আসছে সেটা আমরা একটু পরেই প্রমাণ করার সময়ে শিখব। আগে পুরো জিনিসটাকে গুছিয়ে লিখে নিই। (*)-এ চৌকো ব্র্যাকেটের মধ্যের জিনিসটার একটা ভদ্র নাম দিই, ধরো c_n,

$$c_n = n\left(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1. \qquad (**)$$

তাহলে সাজিয়ে গুছিয়ে লিখতে পারি

Gauss's test

Let $\sum a_n$ be a series of positive terms. Let

$$c_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

Let $\{n^q c_n\}_n$ be bounded for some $q > 0$. Then $\sum a_n = \infty$.

অনেক সময়ে লোকে (**)-টাকে সামান্য ঘুরিয়ে এভাবেও লেখে--

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n},$$

এবার $b_n = n^q c_n$ এবং $p = 1 + q > 1$ লিখলে এটাই হয়ে যায়

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{b_n}{n^p}.$$

তাই অনেক সময়ে Gauss's test-কে লোকে নীচের অংকের মত করে লেখে।

Exercise 12: If $a_n > 0$ and

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^p}.$$

where $\{b_n\}_n$ is bounded and $p > 1$, then show that

- $\sum a_n < \infty$ if $a > 1$,
- $\sum a_n = \infty$ if $a \leq 1$.

■

HINT:
যদি $a = 1$ হয় তবে এটা Gauss's test থেকে আসে। নইলে Raabe's test থেকে।
এবার Gauss's test-এর একটা প্রয়োগ দেখি।

Exercise 13: Examine the convergence of the series

$$\sum_n \left\{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}\right\}^2$$

[3] ■

HINT:

Here

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^2.$$

চট্ করে মনে মনে এর limit নিয়ে দ্যাখো, 1 পাবে। তার মানে ratio test ফেল!

> So
> $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2}-1\right)=\cdots=\frac{4n^2+5n}{(2n+2)^2}.$$

আবার limit নিয়ে দ্যাখো, এবারও 1 আসবে। তার মানে Raabe's test-ও ব্যর্থ! এবার Gauss's test-এর পালা--

> So
> $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1=\frac{4n^2+5n}{(2n+2)^2}-1=\cdots=-\frac{3n+4}{(2n+2)^2}=c_n,\ \text{say.}$$
> Then
> $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{c_n}{n}.$$

লক্ষ কর c_n-এর denominator-এ n-এর সবচেয়ে বেশী power হল n^2, আর numerator-এ সবচেয়ে বেশী power হল n^1. তাই c_n-কে $n^{2-1}=n$ দিয়ে গুণ করলেও bounded থাকবে--

> Take $q=1>0$. Then
> $$n^q c_n=nc_n=-\frac{n(3n+4)}{(2n+2)^2}\to\frac{3}{4}<\infty.$$
> So $\{nc_n\}_n$ is a bounded sequence.
> Hence, by Gauss's test the given series diverges.

Exercise 14: Examine the convergence of the following infinite series:

$$1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{4^2}{5^2}+\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{4^2}{5^2}\cdot\frac{6^2}{7^2}+\cdots.$$

[3] ■

HINT:
এটা বস্তুতঃ আগের অংকটাই, summation ছাড়া লেখা, আর গোড়ায় একটা বাড়তি 1 যোগ করা হয়েছে (তাতে অবশ্যই convergence বা divergence-এর কোনো হেরফের হবে না)।

Exercise 15: Show that the series

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2+\cdots$$

is divergent.[3] ■

HINT:
একইরকম অংকের সামান্য পরিবর্তিত রূপ।

29.4 Bertrand's test

Bertrand's test হল Gauss's test-এর দোসর। Gauss's test-এ আমরা

$$c_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1$$

নিয়েছিলাম এবং $\{n^q c_n\}_n$ bounded হয় কি না দেখেছিলাম। Bertrand's test-এর বেলায় দেখব $\{\log n \times c_n\}_n$ convergent হয় কি না। যদি হয় তবে তার limit-এর উপর নির্ভর করে বলতে পারব $\sum a_n$-এর আচরণ কি হবে, convergent কিংবা divergent.

Bertrand's test

Let $\sum a_n$ be a series of positive terms. Let

$$\ell = \lim \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \log n$$

exist (may be infinite). Then

1. $\ell > 1 \implies \sum a_n < \infty$,
2. $\ell < 1 \implies \sum a_n = \infty$.

Gauss's test-এর মত এটারও প্রমাণ হবে Kummer's test দিয়ে, যেটা আমরা কালকে শিখব।

DAY 30
আরও কিছু test (positive terms)

30.1 Kummer's test

এইবার যে test-টা শিখব সেটা খুবই শক্তিশালী, কারণ ratio test, Raabe's test, Gauss's test আর Bertrand's test সবাই এর special case. এ কথা শুনে হঠাৎ মনে হতে পারে যে, তবে আর কষ্ট করে ওই test-গুলো আলাদা করে শিখলাম কেন, একেবারে এই Kummer's test-টা শিখে রাখলেই তো সমস্যা চুকে যেত! আসলে কিন্তু ব্যাপারটা মোটেই তা না। Kummer's test-টা খুব শক্তিশালী বটে, কিন্তু ব্যবহার করাও তেমনি ঝকমারি। বাস্তবক্ষেত্রে খুব কম সময়েই এই test-টা ব্যবহার করতে হয়।

Exercise 16: State Kummer's test on infinite series of real numbers.[1] ■

HINT:

Kummer's test

Let $\sum x_n$ and $\sum \frac{1}{y_n}$ be two series of positive real numbers and let

$$u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1}.$$

- If $\liminf u_n = k > 0$ then $\sum x_n$ is convergent
- If $\limsup u_n = \ell < 0$ and $\sum \frac{1}{y_n}$ is divergent then $\sum x_n$ is divergent .

এর প্রমাণটাকে ঠিক সহজ বলা যায় না। সেটা করার আগে এর কিছু প্রয়োগ দেখে নিই। প্রয়োগগুলো হল Kummer's test ব্যবহার করে ratio test, Gauss's test আর Bertrand's test-এর প্রমাণ।

30.2 Proofs

এবার আমরা একে একে প্রমাণগুলো করব।

30.2.1 Ratio, Gauss and Bertrand

Ratio test-এর প্রমাণ আমরা আগেই দেখেছি। খুব কঠিন কিছু ছিল না। সুতরাং ওটা প্রমাণ করতে Kummer's test লাগানো অনেকটা মশা মারতে কামান দাগার মত ব্যাপার। যাই হোক, সেই কামানটাই দাগতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Exercise 17: Show that D'Alembert's ratio test is a special case of Kummer's test.[1] ■

HINT:

If we take $y_n \equiv 1$ in Kummer's test,

$$u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1.$$

So by Kummer's test $\sum x_n$ converges if $\limsup u_n > 0$, ie, $\limsup \frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$.

ব্যস্, convergence অংশটা হয়ে গেল। এবার divergence অংশটা দেখি--

Also $\sum \frac{1}{y_n} = \sum 1 = \infty$.

Hence, by Kummer's test, $\sum x_n$ diverges if $\limsup u_n < 0$, ie, $\limsup \frac{x_n}{x_{n+1}} < 1$.

This is the statement of D'Alembert's ratio test. Thus the ratio test is a special case of Kummer's test.

এবার Gauss's test আর Bertrand's test কি করে Kummer's test দিয়ে প্রমাণ করতে হয় বলব। দুই ক্ষেত্রেই এই

কথাটা লাগবে--

$$\begin{aligned}(n+1)\log\tfrac{n}{n+1} &= \log\left[\left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right]\\ &= \log\left[\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]\\ &\to \log(e^{-1}) = -1,\end{aligned}$$

যেহেতু $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ যখন $n\to\infty$. আরেকটা কথাও মনে রেখো। যদি $q>0$ হয় তবে

$$\frac{\log n}{n^q} \to 0 \text{ as } n\to\infty.$$

Exercise 18: Let$\sum a_n$ be a series of positive terms. Let

$$c_n = n\left(\tfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1.$$

If $\{n^q c_n\}_n$ is bounded for some $q>0$ then show that $\sum a_n = \infty$. ■

HINT:
এই অংকটা পুরো করে দেব না, তুমি নিজে নিজে করবে। তাতে Gauss's test আর Kummer's test দুটোই ভালো করে মনে থাকবে। প্রথমে Kummer's test-টা লিখে নাও। সেখানে $x_n = a_n$ আর $y_n = n\log n$ নাও। লক্ষ কর যে তাতে Kummer's test-এর divergence অংশটার সব শর্তই পালিত হয়, কারণ $\sum\frac{1}{y_n}=\infty$. এবার

$$u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}y_n - y_{n+1}$$

বার কর। দেখবে যে $\lim u_n = -1 < 0$ আসবে। ব্যস্, অমনি তুমি Kummer's test থেকে বলে দেবে যে $\sum a_n=\infty$. নীচের অংকে একইভাবে Bertrand's test-এর প্রমাণ চেয়েছে।

Exercise 19: Let $\sum a_n$ be a series of positive terms. Let

$$\ell = \lim\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n$$

exist (may be infinite). Then show that

1. $\ell > 1 \implies \sum a_n < \infty$,
2. $\ell < 1 \implies \sum a_n = \infty$.

■

HINT:
এইটাও Kummer's test ব্যবহার করে করতে হবে। এখানেও $x_n = a_n$ আর $y_n = n\log n$ নাও। আগের অংকের মতই

$$u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}y_n - y_{n+1}$$

বার কর। দেখবে যে $\lim u_n = -1 + \ell$. পাবে। ব্যস্, এবার এক লাইনে উত্তর লিখে দাও।

30.2.2 Kummer and Raabe

এবার Kummer's test-এর প্রমাণের পালা। প্রমাণটা দেখে একটু কান্না পেতে পারে। সান্ত্বনা হিসেবে এটুকু বলতে পারি যে, একবার এই প্রমাণটা হজম করতে পারলে Raabe's test-এর প্রমাণের জন্য আর আলাদা করে খাটতে হবে না।

Exercise 20: Let $\sum x_n$ and $\sum \frac{1}{y_n}$ be two series of positive real numbers and let

$$u_n = \frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1}.$$

Prove that $\sum x_n$ is convergent if $\liminf u_n = k > 0$ and $\sum x_n$ is divergent if $\limsup u_n = \ell < 0$ and $\sum \frac{1}{y_n}$ is divergent.[5] ■

HINT:

আমরা প্রমাণের প্রথম অংশে $\sum x_n$-এর partial sum-এর sequence-টাকে bounded above দেখাব। তাহলেই convergence-এর প্রমাণ হয়ে যাবে, কারণ $x_n > 0$ হওয়ায় partial sum-এর sequence-টা increasing আছেই। কিন্তু এই bounded above দেখানোটা বেশ ঘুরপথে হবে।

> <u>Step 1:</u> Let $\liminf u_n = k > 0$.
>
> Then
>
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n > \tfrac{k}{2} > 0.$$

এই কায়দাটা আমরা শিখেছিলাম চতুর্থ অধ্যায়ে ("Limsup/liminf দিয়ে লেখা")।

> Let $r = \frac{k}{2}$. So $\forall n \geq N$ we have
>
> $$\frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1} > r,$$
>
> or, $\because x_{n+1} > 0$,
>
> $$x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1} > r x_{n+1}.$$
>
> In particular, taking $n = N, N+1, ..., m-1$, we get
>
> $$\begin{aligned} x_N y_N - x_{N+1} y_{N+1} &> r x_{N+1} \\ x_{N+1} y_{N+1} - x_{N+2} y_{N+2} &> r x_{N+2} \\ &\vdots \\ x_{m-1} y_{m-1} - x_m y_m &> r x_m. \end{aligned}$$

এইবার পুরোটা যোগ করে দিলে বাঁদিকে প্রচুর কাটাকুটি হয়ে যাবে (Fig 1). এরকম কাটাকুটির একটা নাম আছে, একে বলে "telescope" করা। আসলে একটার ভিতর একটা নল ঢুকিয়ে বানানো একটা লম্বা telescope-কে যেমন গুটিয়ে ছোটো করে ফেলা যায়, এটাও কতকটা সেরকম।

> Summing,
>
> $$x_N y_N - x_m y_m > r \sum_{i=N+1}^{m} x_i.$$

$$\begin{aligned} x_N y_N - x_{N+1}y_{N+1} &> r x_{N=1} \\ x_{N+1}y_{N+1} - x_{N+2}y_{N+2} &> r x_{N+2} \\ x_{N+2}y_{N+2} - x_{N+3}y_{N+3} &> r x_{N+3} \\ &\vdots \\ x_{m-1}y_{m-1} - x_m y_m &> r x_m \end{aligned}$$

Fig 1

$\therefore \sum_{i=N+1}^m x_i < \frac{x_N y_N}{r}$. So

$$\sum_{i=1}^m x_i < x_1 + \cdots + x_N + \frac{x_N y_N}{r}.$$

So the sequence of partial sums is bounded above.

$\because x_n > 0 \therefore$ the sequence is increasing, and hence must converge.

$\therefore \sum x_n < \infty$, as required.

এবার divergence অংশটার প্রমাণ--

Step 2: Let $\limsup u_n = \ell < 0$.

Then

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n < \tfrac{\ell}{2} < 0.$$

Let $r = \frac{\ell}{2}$. So $\forall n \geq N$ we have

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1} < r,$$

or

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{r + y_{n+1}}{y_n} < \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{y_n}{y_{n+1}}.$$

In particular, taking $n = N, ..., m-1$,

$$\begin{aligned} \frac{x_{N+1}}{x_N} &> \frac{y_N}{y_{N+1}} \\ \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} &> \frac{y_{N+1}}{y_{N+2}} \\ &\vdots \\ \frac{x_m}{x_{m-1}} &> \frac{y_{m-1}}{y_m}. \end{aligned}$$

এখানেও একপ্রস্থ telescoping হবে, তবে এবার যোগের বদলে গুণ করতে হবে।

> Multiplying,
> $$\frac{x_m}{x_N} > \frac{y_N}{y_m}.$$
> So
> $$x_m > x_N y_N \frac{1}{y_m}.$$
> Hence, by comparison test, the result follows.

প্রমাণটা বুঝতে গিয়ে মাথা গুলিয়ে যাচ্ছে তো? এটা হজম করার একটা ভালো কায়দা আছে। সেটা হল প্রথমে একটা special case আলোচনা করা। এবং সেই special case-টা হল Raabe's test. নীচের অংকে ঠিক এটাই করতে দিয়েছে।

Exercise 21: Let $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ be a series of positive real numbers. Prove that if

$$\liminf n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

then $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ converges. ■

HINT:
আশা করি বুঝতে অসুবিধা নেই যে এটা Raabe's test-এর convergence অংশটা। এটা আসলে Kummer's test-এর একটা special case, এবং প্রমাণটাও একেবারে Kummer's test-এর প্রমাণের আদলেই। এই অংকটা আমি কষে দেব না, তুমি নিজেই কষবে। কি করে বলি। প্রথমে লক্ষ কর যে যদি $x_n = U_n$ আর $y_n = n$ নিই তবে Kummer's test-এর $\frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1}$-টা হয়ে যায়

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n+1}} n - n - 1 = n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1$$

অতএব আমাদের অংকটায় যে বলে দিয়েছে

$$\liminf n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

তার মানে

$$\liminf_n \frac{x_n}{x_{n+1}} y_n - y_{n+1} > 0,$$

ঠিক যেটা ছিল Kummer's test-এর convergence অংশের শর্ত। এবার তুমি Kummer's test-এর প্রমাণের step 1-টা দেখে দেখে টুকে যাও, খালি x_n-এর জায়গায় U_n আর y_n-এর জায়গায় n বসিয়ে।
এর পরের অংকটাও একই রকম। এখানে সম্পূর্ণ Raabe's test-টাই প্রমাণ করতে দিয়েছে।

Exercise 22: Let $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ be a series of positive real numbers. Prove that if

$$\liminf n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

then $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ converges, and if

$$\limsup n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1\right) < 1,$$

then $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ diverges.[6] ■

HINT:
এই অংকে Raabe's test-এর convergence আর divergence দুটো অংশই প্রমাণ করতে দিয়েছে। Convergence অংশটা তো আগের অংকেই করেছো Kummer's test-এর প্রমাণের step 1-টা টুকে। Divergence অংশটার প্রমাণেও একই টোকানীতি অব্যহত থাকবে, খালি এবার step 2-টা টুকবে। সেখানে অবশ্য একটা বাড়তি শর্ত ছিল $\sum \frac{1}{y_n} = \infty$. আমরা তো $y_n = n$ নিয়ে কাজ করছি, তাই $\sum \frac{1}{y_n} = \sum \frac{1}{n} = \infty$.

30.3 Logarithmic test

Logarithmic test হল Raabe's test-এর ভাই। Raabe's test শেখার সময়ে আমরা sequence-এর চরিত্রবিশ্লেষণ করেছিলাম, মনে আছে? যখন ratio test ব্যর্থ হয়, মানে $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$ হয়, তখন $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \to 0$ হবে। আমরা এই sequence-টার চরিত্রবিশ্লেষণ করেছিলাম n-দিয়ে গুণ করে, তার পর limit নিয়ে।
এখন $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$ হলে $\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \to 0$ হবে। সুতরাং সেই sequence-টারও চরিত্রবিশ্লেষণ করা যেতে পারে n দিয়ে গুণ করে তার পর limit নিয়ে, অর্থাৎ এখানে প্রধান ভূমিকায় আছে

$$\lim n \log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right).$$

এইভাবে যে test-টা পাওয়া যায় সেটাই হল logarithmic test. জিনিসটা গুছিয়ে লেখে প্রমাণ করার আগে আমাদের comparison test-এর একটা নতুন রূপ শিখতে হবে।

30.3.1 আরেক রকম comparison test

Comparison test (ratio form)

Let $\sum a_n$ and $\sum b_n$ be two series with positive terms. Then

- if $\sum b_n < \infty$ and
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}$$
then $\sum a_n < \infty$,
- if $\sum b_n = \infty$ and
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{b_n}{b_{n+1}}$$
then $\sum a_n = \infty$.

Proof: প্রমাণটা হবে comparison test-এর inequality form ব্যবহার করে।

First part: Let $\sum b_n < \infty$ and

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}.$$

Then

$$\begin{aligned} a_{N+1} \leq & & \tfrac{a_N}{b_N} b_{N+1} \\ a_{N+2} \leq & \tfrac{a_{N+1}}{b_{N+1}} b_{N+2} \leq & \tfrac{a_N}{b_N} b_{N+2} \\ a_{N+3} \leq & \tfrac{a_{N+2}}{b_{N+2}} b_{N+3} \leq & \tfrac{a_N}{b_N} b_{N+3}, \end{aligned}$$

So $\forall n \geq N$

$$a_n \leq \tfrac{a_N}{b_N} \times b_n.$$

So, by comparison test (inequality form) with $\sum b_n$ we see that $\sum a_n < \infty$,as required.

[Q.E.D]

Exercise 23: একই কায়দায় বাকী অংশটা প্রমাণ কর তো। ■

30.3.2 Simple form

এবার logarithmic test প্রমাণ করব। প্রমাণটা ছোট্টো কিন্তু একটা অদ্ভুত কৌশল আছে। তার জন্য খালি এই কথাটা মনে রেখো যে $n \to \infty$ হলে $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ হয়। তাই $\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$.

Logarithmic test (simple form)

Let $\sum a_n$ be a series of positive terms. Let $\ell = \lim n \log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ exist (may be infinite). Then

- $\ell > 1 \implies \sum a_n < \infty$.
- $\ell < 1 \implies \sum a_n = \infty$.

Proof:

First part:

Let $p \in (1, \ell)$.

$\because \lim n \log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \ell > p$,

$$\therefore \lim n \log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > p \log \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

Since $\lim \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$.

এইটাই হল সেই অদ্ভুত কৌশল। আমরা সহজ p-কে জটিল করে $p \times \lim_{n\to\infty} \log\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ রূপে লিখলাম। এইবার খানিকটা দলাইমলাই করব।

$$\text{or,}\quad \lim n\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > p\lim\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$
$$\text{or,}\quad \lim n\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > \lim pn\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

So $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N$

$$\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > p\log\left(\frac{n+1}{n}\right),$$
$$\text{or,}\quad \log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > \log\left(\frac{(n+1)^p}{n^p}\right),$$
$$\text{or,}\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{(n+1)^p}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}.$$

লক্ষ কর যে এটা ঠিক comparison test-এর ratio form-এর মত দেখতে হয়েছে।

Now $\because p > 1 \therefore \sum \frac{1}{n^p} < \infty$.
Hence, by comparison test (ratio form), $\sum a_n < \infty$, as required.

[Q.E.D]

Exercise 24: এবার দ্বিতীয় অংশের প্রমাণটা নিজে নিজে কর। ভয় নেই, প্রথম অংশের যুক্তিটা এখানেও খাটবে। ■

30.3.3 General form

আমরা root test, ratio test, ইত্যাদির বেলায় দেখে এসেছি যে যখনই limit নিয়ে test করা হয়, তখনই একটা general form থাকে যেখানে lim sup আর lim inf নিয়ে কাজ করা যায়। Logarithmic test-ও তার ব্যতিক্রম নয়। এর general form-টা এইরকম--

Logarithmic test (general form)

Let $\sum a_n$ be a series of positive terms. Let

$$\ell_1 = \liminf n\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right),$$
$$\ell_2 = \limsup n\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right).$$

Then

- $\ell_1 > 1 \implies \sum a_n < \infty$.
- $\ell_2 < 1 \implies \sum a_n = \infty$.

Exercise 25: Simple form-এর প্রমাণটা বুঝে থাকলে এই প্রমাণটা করা একেবারেই সহজ। বলতে গেলে প্রায় একই প্রমাণ টুকে দিলেই হবে, দু'একটা জায়গায় সামান্য অদলবদল করে। চেষ্টা করে দ্যাখো। ■

DAY 31
Abel and Dirichlet (arbitrary terms)

অনেক সময়ে এমন একেকটা series নিয়ে কাজ করতে হয় যেখানে general term-টাকে দুটো factor a_n আর b_n-এ ভেঙে ফেলা যায়। মানে series-টাকে $\sum a_n b_n$ হিসেবে লেখা যায়। এরকম ক্ষেত্রে কখনও কখনো a_n আর b_n-এর বৈশিষ্ট্য কাজে লাগিয়ে বলা যায় $\sum a_n b_n$ converge করবে কি না। খুব অল্প কিছু ক্ষেত্রেই অবশ্য এমনটা বলা যায়। তাই এবার যে দুটো test শিখব (Abel's test আর Dirichlet's test) তাদের প্রয়োগ বাস্তবে বড় একটা দেখা যায় না।

31.1 Abel's test

ধাপে ধাপে এগোই--

- প্রথম ধাপ-- ধরো তোমাকে একটা series $\sum a_n$ দিয়ে বলে দিলাম যে সেটা convergent. এবার series-টার প্রত্যেকটা term-কেই কোনো সংখ্যা b দিয়ে গুণ করে দিলাম। তবে যে নতুন series-টা পেলাম $\sum b\, a_n$, সেটাও কি converge করবে? উত্তর হল, হ্যাঁ, অবশ্যই করবে, কারণ b-টাকে 'কমন' নিয়ে বাইরে নিয়ে আসা যাবে।

- দ্বিতীয় ধাপ-- কিন্তু যদি সব a_n-কেই একই সংখ্যা দিয়ে গুণ না করে বিভিন্ন সংখ্যা $b_1, b_2, b_3, \ldots$ দিয়ে গুণ করি? তাহলে নতুন যে $\sum a_n b_n$ series-টা পাব সেটা converge নাও করতে পারে। যেমন $a_n = \frac{1}{n^2}$ আর $b_n = n$ নিলে $\sum a_n$ converge করবে, কিন্তু $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ মোটেই converge করবে না। এখানে সমস্যাটা হল b_n-গুলো বড্ড বড় হয়ে গিয়েছে!

- তৃতীয় ধাপ--যদি b_n-গুলোকে বেশী বড় হতে না দিই, তবে কি সব সমস্যা চলে যাবে, মানে যদি $\{b_n\}_n$ একটা bounded sequence হয়? দুঃখের কথা, তাতেও $\sum a_n b_n$ converge না করতে পারে। খুব সহজ counterexample আছে--$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ আর $b_n = (-1)^n$. তাহলে Leibniz test অনুযায়ী $\sum a_n$ converge করবে, কিন্তু $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ converge করবে না। এখানে b_n-গুলো চিহ্ন উল্টে উল্টে Leibniz test-এর সুবিধাটাকে নষ্ট করে দিল।

- চতুর্থ ধাপ--আচ্ছা, এবার আরও আঁটঘাট বেঁধে কাজে নামি, $\{b_n\}_n$ এবার এমন একটা bounded sequence নেব যার সব term-এর চিহ্ন একই হয়। তবে কি $\sum a_n$ converge করলেই $\sum a_n b_n$-ও converge করতে বাধ্য? এইবার আর পালাবার কোনো পথ বাকি রাখি নি, তাই এবার উত্তর হল--হ্যাঁ! এই কথাটাকে প্রথমে নীচের অংকটায় প্রমাণ করে নিই। সেটাকে একটু এদিক-ওদিক করলেই Abel's test পাব।

Exercise 26: Let $\sum a_n$ be any convergent series. Let $\{b_n\}_n$ be any bounded sequence with all terms of same sign. Then show that $\sum a_n b_n$ must converge. ■

HINT:

> Let
> $$S_n = \sum_1^n a_k \text{ and } T_n = \sum_1^n a_k b_k.$$
> To show that $\{T_n\}_n$ is convergent, ie, Cauchy,

ie,

Target $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |T_n - T_m| < \epsilon.$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

Now let $M > 0$ be a bound of $\{b_n\}_n$.

Since $\{S_n\}_n$ is convergent (hence Cauchy), so

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |S_n - S_m| < \tfrac{\epsilon}{M}.$$

$\boxed{\exists N}$ Choose this N.

$\boxed{\forall m, n}$ Take any $m, n \geq N$.

To show $|T_n - T_m| < \epsilon$.

If $m = n$ then $|T_n - T_m| = 0 < \epsilon$.

Otherwise, let $m < n$, say. Then

$$\begin{aligned} |T_n - T_m| &= |a_{m+1}b_{m+1} + \cdots + a_n b_n| \\ &\leq M|a_{m+1} + \cdots + a_n| \quad \left[\because |b_k| \leq M \text{ and } b_k\text{'s have same sign.}\right] \end{aligned}$$

এই ধাপটা ভালো করে বুঝে নাও। যেহেতু $b_{m+1}, ..., b_n$-এর সবারই একই চিহ্ন তাই সেই চিহ্নটাকে 'কমন' নেওয়া যাবে, এবং বাইরে absolute value থাকায় চিহ্নটার কোনো প্রভাব থাকবে না। তার মানে এখন b-গুলো সবাই positive হয়ে গিয়েছে। এবার সবগুলো b-এর জায়গায় M বসিয়ে দাও, তাতে পুরো জিনিসটা বাড়বে বই কমবে না, কারণ b-রা সবাই M-এর চেয়ে ছোটো। এবার M-টাকে 'কমন' নিয়ে নিলেই উপরের ধাপটা পাবে।

$$\begin{aligned} &= M|S_n - S_m| \\ &< M \times \tfrac{\epsilon}{M} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

এই অংকটা যদি বুঝতে অসুবিধা না হয়ে থাকে তবে Abel's test বুঝতেও কোনো অসুবিধা হবার কথা নয়--

Abel's test

If $\{a_n\}_n$ and $\{b_n\}_n$ are two real sequences such that

- $\{b_n\}_n$ is monotone, bounded,
- $\sum a_n$ is a convergent series,

then $\sum_n a_n b_n$ is convergent.

এটা যে আসলে আগের অংকটারই সামান্য রূপভেদ সেটা আগে বুঝে দেখি। লক্ষ কর এখানেও $\{b_n\}_n$ একটা bounded sequence. কিন্তু সব b_n-এর চিহ্ন একই না বলে, বলেছে যে $\{b_n\}_n$ হল monotone, মানে হয় বাড়ছে নয় কমছে।

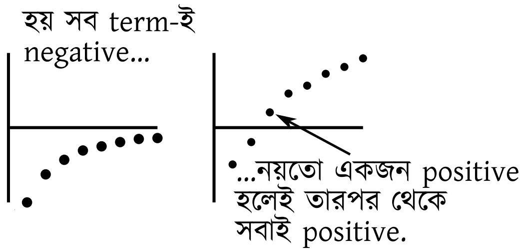


Fig 2

যদি $\{b_n\}_n$ হয় increasing (বা nondecreasing) তবে হয় সবগুলো b_n-ই negative, নয় তো একটাও যদি ≥ 0 হয় তারপর থেকে সকলেই ≥ 0. Fig 2 দ্যাখো। তার মানে প্রথম দিকের finitely many terms বাদ দিলে সবারই একই চিহ্ন। আর finitely many terms নিয়ে কে আর মাথা ঘামায়? Finitely many terms বদলালে তো আর একটা convergent series বেমালুম divergent হয়ে যেতে পারে না! একই রকম যুক্তি খাটে যদি $\{b_n\}_n$ একটা decreasing sequence হত (Fig 3).
এইবার আমরা তবে Abel's test প্রমাণ করা শুরু করি। নীচের অংকটা সেটাই চেয়েছে।

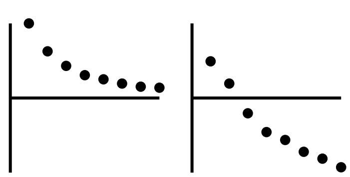
Exercise 27: If $\{b_n\}_n$ is monotone bounded sequence and $\sum_n a_n$ is a convergent series then prove that $\sum_n a_n b_n$ is convergent.[4] ■

HINT:

> Since $\{b_n\}_n$ is monotone, so all but finitely many terms have the same sign.
>
> ⟦ Because:
>
> If monotone nondecreasing, then either all terms are negative, or if at least one term is nonnegative, then all terms after it are nonnegative.
> Similarly for nonincreasing case.
>
> ⟧
>
> Let $N_1 \in \mathbb{N}$ be such that $\forall n \geq N_1$ the terms b_n have same sign.

এর পরের অংশ একেবারেই আগের অংকটার মত। খালি প্রথম $N_1 - 1$-খানা term বাদ দিয়ে চলতে হবে।

Fig 3



Let

$$S_n = \sum_1^n a_k \text{ and } T_n = \sum_1^n a_k b_k.$$

To show that $\{T_n\}_n$ is convergent, ie, Cauchy,

ie,

Target $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |T_n - T_m| < \epsilon.$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

Now let $M > 0$ be a bound of $\{b_n\}_n$.

Since $\{S_n\}_n$ is convergent (hence Cauchy), so

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_2 \quad |S_n - S_m| < \tfrac{\epsilon}{M}.$$

$\boxed{\exists N}$ Choose $N = \max\{N_1, N_2\}$.

লক্ষ করলে কিভাবে আমরা প্রথম $N_1 - 1$-খানা term এড়িয়ে গেলাম? যেহেতু $N = \max\{N_1, N_2\}$ নিয়েছি তাই এবার $m, n \geq N$ নিলে $m, n \geq N_1$-ও হবে, তাই প্রথম $N_1 - 1$-টা term-এর ঝামেলায় পড়তে হবে না।

$\boxed{\forall m, n}$ Take any $m, n \geq N$.

To show $|T_n - T_m| < \epsilon$.

If $m = n$ then $|T_n - T_m| = 0 < \epsilon$.

Otherwise, let $m < n$, say. Then

$$\begin{aligned} |T_n - T_m| &= |a_{m+1}b_{m+1} + \cdots + a_n b_n| \\ &\leq M|a_{m+1} + \cdots + a_n| \quad \left[\because |b_k| \leq M \text{ and } b_k\text{'s have same sign for } k \geq N_1.\right] \\ &= M|S_n - S_m| \\ &< M \times \tfrac{\epsilon}{M} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

বিকল্প পদ্ধতি

অনেক বইতে Abel's theorem-এর অন্য একটা প্রমাণ দেওয়া থাকে। সেটা নীচে দিলাম।

Let $\forall n \in \mathbb{N} \ |b_n| \leq M$.

We shall assume first that

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots.$$

Let

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Then $a_n = S_n - S_{n-1}$ for $n \geq 2$ and $a_1 = S_1$.

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \\ = \;& S_1b_1 + (S_2 - S_1)b_2 + \cdots + (S_n - S_{n-1})b_n \\ = \;& S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_nb_n \\ = \;& S_1c_1 + S_2c_2 + \cdots + S_{n-1}c_{n-1} + S_nb_n, \end{aligned}$$

where $c_n = b_n - b_{n+1}$ for $n \geq 1$.

Since $\{b_n\}_n$ is monotone, bounded, so it is convergent. Also $\{S_n\}_n$ is convergent.

So $\{S_nb_n\}_n$ is convergent.

Hence it is enough to show that

$$S_1c_1 + S_2c_2 + \cdots + S_{n-1}c_{n-1}$$

is convergent, *i.e.*, Cauchy,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad (\text{with } m < n)$$
$$|S_mc_m + S_{m+1}c_{m+1} + \cdots + S_nc_n| < \epsilon.$$

Fix any $\epsilon > 0$.

Now $\{c_k\}_k$ is bounded by $2M$.

⟦ Because:

$$|c_k| = |b_k - b_{k+1}| \leq |b_k| + |b_{k+1}| \leq M + M = 2M.$$

⟧

Also, $\because \{b_k\}_k$ is monotone,

$\therefore$ all the c_k's have the same sign.

So

$$\begin{aligned} & |S_mc_m + S_{m+1}c_{m+1} + \cdots + S_nc_n| \\ \leq \;& 2M \cdot |S_m + S_{m+1} + \cdots + S_n|. \end{aligned}$$

Now, since $\{S_n\}_n$ is a Cauchy sequence,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad (\text{with } m < n) \quad |S_m + S_{m+1} + \cdots + S_n| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

So $\forall m < n \geq N$ we have

$$|S_m c_m + S_{m+1} c_{m+1} + \cdots + S_n c_n| < \epsilon,$$

as required.

31.2 Dirichlet's test

Dirichlet's test অনেকটা Abel's test-এর মতই একটা ব্যাপার--a_n আর b_n দুটো sequence দেওয়া থাকে, তারা কয়েকটা শর্ত পালন করলে দেখানো যাবে যে $\sum a_n b_n$ converge করতে বাধ্য। Abel's test-এর সঙ্গে Dirichlet's test-এর মূল পার্থক্য হল এই শর্তগুলো নিয়ে। Abel's test-এ b_n-এর উপর শর্ত কম আর a_n-এর উপর শর্ত বেশী। Dirichlet's test-এ ব্যাপারটা উল্টো--a_n-এর উপর শর্তটা খানিকটা হালকা করে b_n-এর উপর চাপ বাড়ানো হয়। বিশদ করে বলি।

- Abel's test-এ a_n-এর উপর শর্ত ছিল এই যে $\sum a_n$-কে converge করতে হবে। মানে যদি partial sum -এর sequence-টা নিই $\{\sum_1^n a_k\}_n$ তবে তাকে convergent হতে হবে। Dirichlet's test এখানে বেশী উদার, convergent না হলেও আপত্তি নেই, খালি bounded হলেই চলবে।
- Abel's test চাইত $\{b_n\}_n$ যেন একটা bounded, monotone sequence হয়। কিন্তু এখানে Dirichlet's test-এর চাহিদা বেশী, $b_n \to 0$-ও হতে হবে। এক্ষেত্রে অবশ্য আর bounded শর্তটা আলাদা করে উল্লেখ করার মানে হয় না (কারণ convergent sequence মাত্রেই bounded হয়)।

সুতরাং সব মিলিয়ে পেলাম--

Dirichlet's test

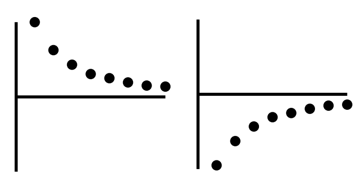
If $\{a_n\}_n$ and $\{b_n\}_n$ are two real sequences such that

- $\{b_n\}_n$ is monotone,
- $b_n \to 0$,
- $\{\sum_{k=1}^n a_k\}_n$ is a bounded sequence

then $\sum_n a_n b_n$ is convergent.

Proof: এই প্রমাণের মূল কাঠামোটাও একেবারেই Abel's test-এর প্রমাণের মত। যেহেতু $b_n \to 0$ এবং $\{b_n\}_n$ হল monotone তাই $\{b_n\}_n$ দেখতে Fig 4-এর মত, তাই হয় সবগুলো b_n-ই positive, নয়তো সবগুলোই negative.

Fig 4



$\because \{b_n\}_n$ is monotone and $b_n \to 0$,
$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n$ have same sign.

বাকীটা একেবারেই Abel's test-এর প্রমাণের মত।

Let
$$S_n = \sum_1^n a_k \text{ and } T_n = \sum_1^n a_k b_k.$$
To show that $\{T_n\}_n$ is convergent, ie, Cauchy,
ie,

Target $\quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |T_n - T_m| < \epsilon.$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.
Let $M > 0$ be a bound for $\{S_n\}_n$.

Abel's test-এর প্রমাণে M ছিল $\{b_n\}_n$-এর bound, এখানে $\{S_n\}_n$-এর bound.

$\because b_n \to 0$
$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |b_n| < \frac{\epsilon}{2M}.$$
$\boxed{\exists N}$ Choose this N.
$\boxed{\forall m, n}$ Take any $m, n \geq N$.

To show $|T_n - T_m| < \epsilon$.
If $m = n$ then obvious.
Otherwise, let $m < n$, say. Then
$$\begin{aligned}
|T_n - T_m| &= |a_{m+1}b_{m+1} + \cdots + a_n b_n| \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2M}|a_{m+1} + \cdots + a_n| \quad \left[\because |b_k| \leq \tfrac{\epsilon}{2M} \text{ for } k \geq N \text{ and } b_k\text{'s have same sign.}\right] \\
&= \tfrac{\epsilon}{2M}|S_n - S_m| \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2M}\big(|S_n| + |S_m|\big) \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2M}(M + M) \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$
as required.

বিকল্প পদ্ধতি

অনেক বইতে অবশ্য একটা অন্য প্রমাণ দেওয়া থাকে। সেটা এইরকম--

Let

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{for } n \geq 1. \end{aligned}$$

Then it is given that

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n| < M.$$

Let

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Then

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) b_k \\ &= S_n b_n - S_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k \\ &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k. \end{aligned}$$

এই জায়গাটা একটু গোলমেলে ঠেকতে পারে। কিন্তু এটা Abel's test-এর দ্বিতীয় প্রমাণটাতেও ব্যবহার করেছিলাম।

Now

$$|S_n b_n| < M|b_n| \to 0.$$

Also

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |(b_k - b_{k+1}) S_k| &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) |S_k| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \\ &= M(b_1 - b_n) \to M b_1. \end{aligned}$$

So, by comparison test, the series

$$\sum_{k=2}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) S_k$$

> converges absolutely, and hence converges. Thus T_n converges, completing the proof.

[Q.E.D]

আগে যে আমরা Leibniz's test শিখেছিলাম, সেটা কিন্তু আসলে Dirichlet's test-এর একটা special case. নীচের অংকটা করলেই সেটা বুঝতে পারবে।

Exercise 28: ধরো $\{b_n\}_n$ decreases to 0. তাহলে $\sum(-1)^n b_n$ converge করবে। এটাই ছিল Leibniz's test-এর বক্তব্য। দেখাও যে Dirichlet's test থেকেও একই সিদ্ধান্ত করা যায়। ■

Exercise 29: If the sequence of partial sums of an infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is bounded, show that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ is convergent for $t > 0$.[2] ■

HINT:

> By Dirichlet's test we know that if the sequence of partial sums of an infinite series $\sum a_n$ is bounded, and $\{b_n\}$ is a monotone sequence going to 0, then the infinite series $\sum a_n b_n$ converges.
>
> Here the a_n's already satisfy the condition. Let $b_n = e^{-nt}$. Since $t > 0$ so b_n decreases to 0.
>
> Hence the required convergence follows from Dirichlet's test.

Exercise 30: Use Dirichlet's test to show that the series

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

is convergent.[2] ■

HINT:
এটা Leibniz's test দিয়েই হয়ে যায়! কিন্তু যেহেতু Dirichlet's test ব্যবহার করতে বলে দিয়েছে, তাই সেরকমই করি। প্রথমে উপযুক্ত a_n আর b_n নিতে হবে--

> Let $a_n = (-1)^{n+1}$ and $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
>
> Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
>
> Then
>
> $$S_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ even.} \end{cases}$$
>
> So $\{S_n\}_n$ is a bounded sequence.
>
> Also b_n decreases to 0.

$\therefore$ By Dirichlet's theorem, $\sum a_n b_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converges, as required.

Exercise 31: Use Dirichlet's test to show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

converges for all $x \in \mathbb{R}$. ■

HINT:

The given series is $\sum a_n b_n$, where

$$a_n = \sin nx \text{ and } b_n = \frac{1}{n}.$$

Then Also $\{b_n\}_n$ is a monotone sequence converging to 0.

We shall show that the sequence of partial sums

$$S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

is bounded.

If $x = 0$ then $S_n \equiv 0$, and hence $\{S_n\}_n$ is bounded.

এইবার দেখাব যে $x \neq 0$ হলেও $\{S_n\}_n$ bounded হবে। এর জন্য complex algebra থেকে দুটো তথ্য লাগাব। প্রথম তথ্য হল

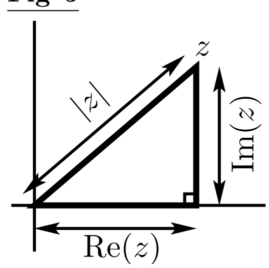
$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta.$$

আর দ্বিতীয় তথ্য হল z যদি যে কোনো complex number হয় তবে

$$|Re(z)|, |Im(z)| \leq |z|$$

হয়। কেন হয় সেটা Fig 5-এর ত্রিভুজটা দেখলেই বুঝবে।

Fig 5



If $x \neq 0$, then

$$\begin{aligned} |S_n| &= |[|\sum_{k=1}^{n} \sin kx|]| \\ &= |[|Im\sum_{k=1}^{n} e^{\mathbf{i}kx}|]| \\ &\leq |[|\sum_{k=1}^{n} e^{\mathbf{i}kx}|]| \\ &= |[|e^{\mathbf{i}kx}\frac{1-e^{\mathbf{i}nx}}{1-e^{\mathbf{i}x}}|]| \\ &= \frac{|1-e^{\mathbf{i}nx}|}{|1-e^{\mathbf{i}x}|} \\ &\leq \frac{|1|+|e^{\mathbf{i}nx}|}{|1-e^{\mathbf{i}x}|} \\ &= \frac{2}{|1-e^{\mathbf{i}x}|}, \end{aligned}$$

which is free of n. So $\{S_n\}_n$ is a bounded sequence.
So by Dirichlet's test

$$\sum a_n b_n = \sum \frac{\sin nx}{n}$$

converges.

Exercise 32: Use Dirichlet's test to show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$$

converges for all $x \in \mathbb{R}$. ■

Answers

28. $a_n = (-1)^n$ নাও।

Index